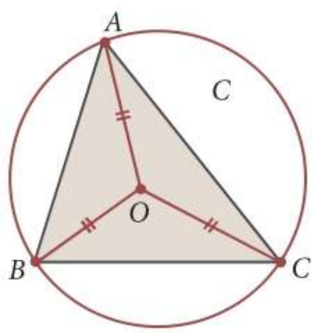
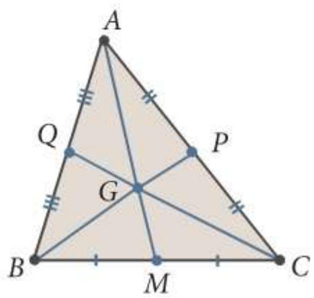
TRÊS VEZES NOVE PONTOS

MICHEL SPIRA

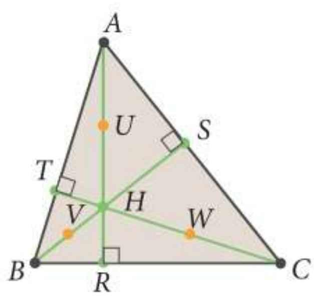
Triângulos são fonte inesgotável de surpresas. Antes de dizer quais delas são o tema desse artigo, vamos fixar notação como na figura a seguir.



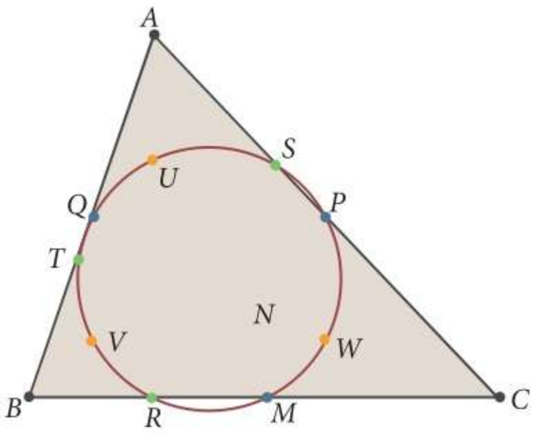
C: círculo circunscrito
O: circuncentro



M, P, Q: pontos médios dos lados
G: baricentro



R, S, T: pés das alturas
H: ortocentro
U, V, W: pontos médios de *AH*, *BH* e *CH*



Os pontos M, P, Q, R, S, T, U, V e W serão denominados, a partir de agora, os *nove pontos*. Três pontos não alinhados determinam um círculo, mas achar quatro pontos concíclicos não é comum. No entanto, temos o extraordinário fato da figura anterior: os nove pontos estão em um círculo $\mathcal{N}$, que chamamos de *círculo de nove pontos*. Nesse artigo, vamos apresentar três demonstrações da existência de $\mathcal{N}$ usando geometria sintética, homotetias e números complexos. Vamos também abordar um belo objeto relacionado a $\mathcal{N}$, a saber, a *reta de Euler*.

Para detalhes históricos sobre o círculo de nove pontos, indicamos a leitura de [1].

Em nossas figuras aparecem apenas triângulos acutângulos por questão de simplicidade visual, mas os argumentos que utilizaremos são gerais. Isso vale também para os caso em os nove pontos não são distintos; eles podem se reduzir a até quatro, que é o caso de um triângulo retângulo isósceles.

1. GEOMETRIA SINTÉTICA

Para demonstrar sinteticamente a existência de $\mathcal{N}$ e determinar seu centro e raio vamos seguir, com comentários adicionais por conta do autor, a demonstração dada pelo geômetra alemão Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834) em 1822. Essa e muitas outras demonstrações, inclusive a que aparece em [2], podem ser encontradas em [1].