RAIZ

Mario de Assis Oliveira

O cálculo de raízes de números inteiros positivos com calculadoras, em geral, fornece resultados com números decimais que possuem muitos dígitos após a vírgula, fica estranho ter de acreditar na máquina, por não ter uma técnica mais convincente.

Nesse trabalho, vamos apresentar técnicas para calcular frações, com numerador e denominador bem explícitos, que se aproximam de uma raiz *k*-ésima (*k* um número inteiro positivo) de um número natural $a>0$ ($\sqrt[k]{a}$).

Os babilônios, 17 séculos antes da era cristã, usavam um método iterativo para obter valores aproximados da raiz quadrada de um número real a > 0, que é a sequência dada por:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right). \quad (1)$$

que é obtida da seguinte forma: tomamos uma aproximação inicial $x_1 > 0$ da raiz quadrada e fazemos $y_1 = \frac{a}{x_1}$, que é outra aproximação positiva da raiz. Se $x_1 < \sqrt{a}$, então $y_1 > \sqrt{a}$ e vice-versa. Como $\sqrt{x_1 y_1} = a$, é razoável esperar que a média aritmética

$$x_2 = \frac{x_1 = y_1}{2} = \frac{1}{2}(x_1 + y_1) = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right)$$

seja uma aproximação melhor para a raiz.

Repetindo o processo construímos a sequência (1).

Podemos usar a mesma ideia para a raiz cúbica, tomando uma aproximação inicial $x_1 > 0$, fazendo agora $y_1 = a/(x_1)^2 \Leftrightarrow (x_1)^2 y_1 = a$ e calculando a média ponderada

$$x_2 = \frac{2x_1 + y_1}{3} = \frac{1}{3}(2x_1 + y_1) = \frac{1}{3}\left(2x_1 + \frac{a}{(x_1)^2}\right).$$

Repetindo o processo chegamos a

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{(x_n)^2}\right). \qquad (2)$$

Para a raiz k-ésima, $k \geq 2$natural, tomamos $x_1 > 0$, $y_1 = a/(x_1)^{k-1} \Leftrightarrow \pm(x_1)^{k-1} y_1 = a$ e calculamos a média ponderada

$$x_2 = \frac{(k-1)x_1 + y_1}{k} = \frac{1}{k}\left[(k-1)x_1 + y_1\right] = \frac{1}{k}\left[(k-1)x_1 + \frac{a}{(x_1)^{k-1}}\right].$$

Repetindo o processo, chegamos a

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left[(k-1)x_n + \frac{a}{(x_n)^{k-1}}\right]. \qquad (3)$$

que, quando for convergente (e será, desde que tomemos um x_1 suficientemente próximo da $\sqrt[k]{a}$), converge para a $\sqrt[k]{a}$, pois sendo $l = \lim_{n\to\infty} x_n$ fica

$$l = \frac{1}{k}\left[(k-1)l + \frac{a}{(l)^{k-1}}\right] \Longleftrightarrow kl = (k-1)l + \frac{a}{l^{k-1}} \Leftrightarrow l = \frac{a}{l^{k-1}} \Leftrightarrow l^k = a \Leftrightarrow l = \sqrt[k]{a}\,.$$

Essas recorrências (1), (2) e (3) podem ser obtidas pelo método de Newton, que usamos para calcular raízes de equações $f(x) = o$, através da sequência iterativa dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Para mais informações sobre esse método e os critérios de convergência, ver o capítulo 9 da referência [1].

No exame de qualificação do PROFMAT ENQ-2017.2, a terceira questão teve o seguinte enunciado:

“Considere as sequências p_ne q_n definidas recursivamente por $p_1 = q_1 = 1$ e $\begin{cases} p_{n+1} = (p_n)^2 + 2(q_n)^2 \\ q_{n+1} = 2p_nq_n,\ n \geq 1 \end{cases}$”.

a) Prove que ;$(p_n)^2 - 2(q_n)^2 = 1$

b) Use o item (a) para concluir que as frações $\dfrac{p_n}{q_n}$ são irredutíveis para todo$n \geq 2$.”

Quando fazemos $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \dfrac{(p_n)^2 + 2(q_n)^2}{2p_nq_n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p_n}{q_n} + \dfrac{2}{\frac{p_n}{q_n}}\right)$, obtemos a recorrência (1) , com $x_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, que converge para a raiz quadrada de 2. Mas o que tem de bom nessa recorrência da questão do ENQ 2017.2 é poder