



QUESTÕES

COM QUESTÕES

RESPONSÁVEIS
EDUARDO WAGNER
E JOSÉ LUIZ PASTORE MELLO.
ENVIE SUAS SUGESTÕES DE PROBLEMAS
PARA A RPM – QUESTÕES COM QUESTÕES.
E-MAIL: RPM@SBM.ORG.BR

Neste número da RPM iniciamos a seção com uma questão da prova discursiva do último vestibular da FUVEST/2024 que trata das equações da reta e da parábola. A questão é clássica e seu conteúdo é bem desenvolvido na maioria das escolas de ensino médio, entretanto, ela aqui servirá de motivação para mostrarmos outras questões que exploram propriedades interessantes da parábola.

FUVEST – 2024 – PROVA DISCURSIVA

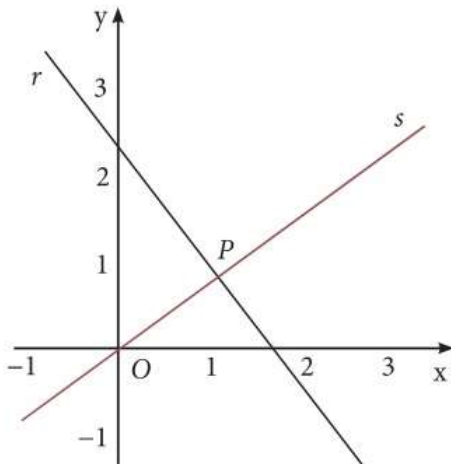
Considere a parábola P dada pela equação $y = x^2$ e a reta r dada pela equação $ax + by + c = 0$, onde a, b e c são constantes reais. Denote por $O = (0, 0)$ a origem do sistema de coordenadas Oxy .

- Se $a = 2$, $b = -1$ e $c = 3$, determine todos os pontos do plano cartesiano que pertencem, simultaneamente, à reta r e à parábola P .
- Se $a = 4$, $b = 3$ e $c = -7$, determine o ponto da reta r que está mais próximo de O .
- Considere três pontos A , B e C na parábola P , tais que $A = (-1, 1)$, B pertence ao primeiro quadrante e os segmentos AB e OC são paralelos. Determine B e C de forma que a distância de B até C seja $\sqrt{17}$.



Solução da questão da FUVEST

- a) Faremos a interseção da parábola representada pela equação $y = x^2$ com a reta de equação $2x - y + 3 = 0$. Da equação da reta escrevemos $y = 2x + 3$ e, fazendo a substituição na equação da parábola ficamos com $2x + 3 = x^2$ ou seja, com a equação $x^2 - 2x - 3 = 0$, cujas raízes são -1 e 3 . Com isso, obtemos os dois pontos comuns à reta e a parábola: $(-1, 1)$ e $(3, 9)$.
- b) Vamos determinar o ponto da reta $r: 4x + 3y = 7$ mais próximo da origem. A figura abaixo mostra a reta r e o ponto P dessa reta que é o mais próximo da origem.



O ponto P é o pé da perpendicular traçada da origem à reta r . Como a reta r tem equação $4x + 3y = 7$,

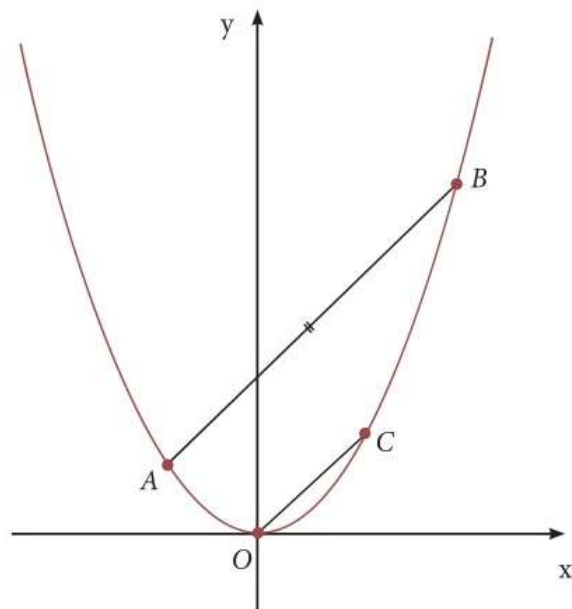
a reta s , que passa pela origem e é perpendicular a r , tem equação $3x - 4y = 0$.¹

O ponto P é a solução do sistema

$$\begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, encontramos $P = \left(\frac{28}{25}, \frac{21}{25}\right)$.

- c) A figura mostra os elementos descritos no enunciado.



¹ Observe que as retas $ax + by = c$ e $bx - ay = c'$ são sempre perpendiculares.