RESPONSÁVEIS
Cícero Magalhães,
Emiliano Chagas
e Régis Barbosa

ENVIE SUAS SOLUÇÕES PARA RPM — PROBLEMAS
CONTATO: RPM@SBM.ORG.BR
COM O ASSUNTO RPM 110 — PROBLEMAS

As soluções dos problemas 481, 482, 483 e 484 serão consideradas se enviadas até 30 de março de 2025.

PROBLEMAS

481

Existe um único triângulo ABC tal que $AC = 14$, $\cos \widehat{A} = \frac{4}{5}$ e o raio do círculo inscrito é $r = 4$. Determine a área desse triângulo.

482

Arnaldo escolhe um conjunto A de inteiros positivos. Então Bernaldo lista todos os conjuntos finitos não vazios B de inteiros positivos com a propriedade de que o elemento máximo de B pertence a A. A lista de Bernaldo tem 2024 conjuntos. Encontre a soma dos elementos de A.

483

Seja ABC um triângulo de circuncentro O e incentro I, de modo que $\overline{IA}$ é perpendicular a $\overline{OI}$, o raio da circunferência circunscrita seja 13 e o raio da circunferência inscrita seja 6.

Calcule $AB \cdot AC$.

484. (IMO 2024 – P5)

O caracol Turbo joga num tabuleiro retangular com 2024 linhas e 2023 colunas. Em 2022 casas (quadrados unitários) desse tabuleiro existem monstros escondidos. Inicialmente, Turbo não conhece a posição de qualquer um dos monstros, mas ele sabe que existe exatamente um monstro em cada linha, com exceção da primeira e da última linha, e que cada coluna tem no máximo um monstro.

Turbo faz uma série de tentativas para ir da primeira linha à última linha. Em cada tentativa, ele escolhe começar em qualquer casa na primeira linha, e repetidamente se move para uma casa adjacente, ou seja, com um lado em comum (ele pode voltar a uma casa visitada anteriormente). Se ele chega a uma casa em que há um monstro, essa tentativa acaba e ele é transportado de volta para a primeira linha para começar uma nova tentativa. Os monstros não se movem e Turbo lembra se em cada casa que ele visitou há, ou não há, um monstro. Se ele chega a uma casa na última linha, a tentativa acaba e o jogo termina.

Determine o menor valor de n para o qual Turbo tem uma estratégia que garante que ele chegará na última linha na n-ésima tentativa, ou antes, sem importar as posições dos monstros.

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS 473, 474, 475 E 476

473

Seja $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ uma sequência numérica satisfazendo

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}, n = 1, 2, 3, \dots$$

a. Determine o valor de a_{20}.

b. Determine o valor de $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2023}}$.

Solução de Abraão Caetano Mendes (São Gabriel da Cachoeira-AM)

a. Seja $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. Então,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

$$a_n = n(n+1)\left(\frac{(n+2)-(n-1)}{6}\right) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Logo, $a_{20} = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210$.

b. Como $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, temos que:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Temos que a soma desejada é igual ao resultado de:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2023}} = 2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) +$$
$$+ 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + 2\left(\frac{1}{2023} - \frac{1}{2024}\right)$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2023}} = 2\left(1 - \frac{1}{2024}\right) = \frac{2023}{1012}.$$

474

Seja $ABCD$ um quadrado inscrito em uma circunferência e um ponto X pertencente a essa circunferência. Se $XA \cdot XC = 56$ e $XB \cdot XD = 90$, qual é a área do quadrado $ABCD$?