O Ensino de Probabilidade

Paulo Cezar Pinto Carvalho

IMPA

Probabilidade na Escola Básica

- Tópico de grande importância em carreiras profissionais de todas as áreas (Engenharia, Medicina, Administração, ...)
- Mas pouco explorado (evitado?) na Escola Básica (normalmente, um apêndice ao estudo de Análise Combinatória: *nº casos favoráveis/ nº casos possíveis*).
- Por que isso ocorre? Podemos mudar?

Probabilidade

- Modelo matemático para incerteza
- Desenvolvimento relativamente recente
  - Cardano (século XVI)
  - Pascal (século XVII)
- *Peter Bernstein*, **Desafio aos Deuses (Against the Gods)**

Problema dos Pontos (Cardano)

- Dois jogadores de mesma habilidade disputam um prêmio de R$ 2.000,00 em uma série de partidas: o primeiro a obter 10 vitórias ganha o prêmio. O jogo é interrompido quando o jogador A tem 9 vitórias e o jogador B, 7 vitórias. Como o prêmio deve ser dividido?

Problema dos Pontos (Cardano)

- Uma proposta
  - olhar para o **passado:** dividir o prêmio proporcionalmente ao número de vitórias já obtidas (9 e 7)

Problema dos Pontos (Cardano)

- Uma outra proposta
  - olhar para o **futuro**: dividir o prêmio proporcionalmente à quantidade de vitórias que cada um obteria se o final do jogo fosse repetido um grande número de vezes.

➢ Probabilidade!

Modelo Probabilístico Simples

- **Espaço amostral** (Ω): conjunto de resultados possíveis para um *experimento aleatório*.
- **Probabilidade**: número não negativo atribuído a cada um destes resultados, de modo que a soma seja 1.
  (intuição: freqüência a longo prazo)

Modelo Simples

- Adequado para o caso discreto

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$$

$$p_1 + p_2 + \ \ ... \quad = \ 1$$

Para cada $A \subset \Omega$, $P(A) = \Sigma_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$

evento

Como atribuir probabilidades?

- **Estatística**: estimar através de frequência observada.

- Explorar simetria: **modelos equiprováveis**

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n \}$$

$$p_1 = p_2 = ... = p_n = 1/n$$

  – Moedas, bolas em urnas, cartas, dados, etc

Exemplo

- Uma moeda “honesta” é lançada 3 vezes. Qual é a probabilidade de sair 2 caras e 1 coroa?

- Espaço amostral: $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ (número de caras)
- Probabilidade de sair 2 caras = $P(\{2\}) = ¼$.

Exemplo

- Uma moeda “honesta” é lançada 3 vezes. Qual é a probabilidade de sair 2 caras e 1 coroa?

- ~~Espaço amostral: $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ (número de caras)~~
- ~~Probabilidade de sair 2 caras = $P(\{2\}) = ¼$.~~

Exemplo

- Uma moeda “honesta” é lançada 3 vezes. Qual é a probabilidade de sair 2 caras?

- Espaço amostral:

  Ω = {ccc, cck, ckc, kcc, ckk, kck, kkc, kkk}

- Probabilidade de sair 2 caras = P({cck, ckc, kcc}) = 3/8.

Observação

- É óbvio que kkk e ckc têm a mesma chance de ocorrer?
- E kkkkkkkkk e ckkckckckk?

➢ **Saber identificar modelos equiprováveis.**

Exemplo

- Os alunos de uma turma organizaram uma rifa, na qual 15 alunos compraram 1 bilhete, 10 compraram 2 bilhetes e 5 compraram 3 bilhetes. É mais provável que o aluno sorteado tenha comprado 1, 2 ou 3 bilhetes?

Exemplo

- Cinco pessoas vão disputar uma corrida. É razoável admitir iguais probabilidades de vitória?

Exemplo

- Cinco pessoas vão disputar uma corrida. Camisas de 1 a 5 são sorteadas entre eles. É razoável admitir que a probabilidade de o ganhador usar a camisa 2 é 1/5?

Exemplo: Mega-Sena

- Apostar em 1-2-3-4-5-6 ou 7-16-24-28-41-52?

- A dezena 27 não sai há 33 semanas na Mega-Sena. Como usar para apostar?
- Apostar nos números que sairam no último sorteio é uma boa idéia?

➢ **Desenvolvimento do espírito crítico**.

Exemplo

- Para sortear as vagas em um condomínio, um papelzinho com o número de cada vaga (a boa é a 7!) é colocado em uma urna. Você prefere ser o primeiro ou o último a sortear um papel?

Exemplo

- É justo usar par-ou-ímpar em uma disputa?

Exemplo

- Dois dados idênticos são lançados ao mesmo tempo. Todas as somas têm a mesma chance de ocorrer? Qual é a probabilidade de dar soma 7?

Exemplo

- Dois dados idênticos são lançados ao mesmo tempo. Todas as somas têm a mesma chance de ocorrer? Qual é a probabilidade de dar soma 7?
  – Joãozinho: Há 36 possibilidades de resultado, das quais 6 dão soma 7; a probabilidade é 1/6.
  – Pedrinho: Como os dados são idênticos, há 15 + 6 = 21 possibilidades de resultado, das quais 3 dão soma 7; a probabilidade é 1/7.

O problema dos pontos

- A ganhou 9 vezes, B ganhou 7.
- Quem ganhar 10, leva o prêmio de R$ 2000,00.
- Como dividir?

O problema dos pontos

- O que significa dizer que a probabilidade de que A vença o jogo é igual a 7/8?

- **Usar simulação para construir a idéia intuitiva de probabilidade**.
  - Moedas, dados, baralho, urnas, par-ou-ímpar
  - Computador

Comentários

- É necessário começar cedo o estudo de Probabilidade, para que o aluno tenha tempo de desenvolver uma boa intuição.
- Ensino de Probabilidade pode ser desvinculado de Análise Combinatória.

Sugestões

- Ensinar o aluno a identificar modelos equiprováveis.
- Levá-lo a desenvolver espírito crítico em situações envolvendo probabilidade.
- Enfatizar o uso de probabilidade para tomar decisões.
- Usar simulação para construir a idéia intuitiva de probabilidade.

- www.impa.br/~pcezar/rpm