

**UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
5º Encontro da RPM**

TRANSFORMAÇÕES NO PLANO

Jorge Costa do Nascimento

Introdução

Na produção desse texto utilizamos como fonte de pesquisa material bibliográfico produzido por um grupo de Professores da Universidade Federal da Bahia, encabeçado pelo Professor Omar Catunda e a Professora Martha Maria de Souza Dantas.

Como é dito no prefácio de alguns dos livros consultados “ as idéias originais da apresentação da geometria do plano, utilizando transformações, são devidas a Omar Catunda”. (CATUNDA et al)

Portanto, que se denomina aqui por Transformação no Plano são movimentos executados sobre diversos elementos (ponto, segmentos de reta, retas, figuras, etc.) do plano \mathbb{R}^2 de maneira que se obterão elementos congruentes ou semelhantes conforme a transformação utilizada.

As transformações referidas acima podem ser: translação por vetor fixo; rotação de ângulo fixo; simetria em torno de um ponto fixo; simetria por uma reta fixa; ou, homotetia.

Nesse texto, apresentaremos comentários sobre duas delas as transformações translação e rotação de ângulo (começando pela translação), as quais, assim como as simetrias, denominaremos de Transformações Rígidas no Plano. Pois, ao serem aplicadas sobre um elemento não provoca nenhum tipo de modificação nesse elemento, isto é, conserva ângulo, medida de segmento, distância, entre outros. As transformações no plano são muito boas para se obter figuras congruentes, por exemplo.

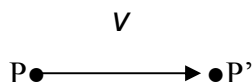
1. Translações no Plano

Definição 1.1: Uma translação de vetor v , ou simplesmente, translação v é uma relação que a cada ponto P do plano faz corresponder um ponto P' desse mesmo plano de maneira que

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \mathbf{v}.$$

O ponto P' nestas condições é denominado transformado de P por v . Mas, o ponto P' é, também, designado soma do ponto P com o vetor v . ou seja, a soma de um ponto com um vetor é um ponto.

Assim, dados os pontos P , P' e o vetor v , tem-se



Por outro lado, temos que dados dois pontos quaisquer do plano, P e P' , fica determinado o vetor $\mathbf{v} = \mathbf{PP}'$, o qual pode, também, ser indicado como $\mathbf{v} = \mathbf{P}' - \mathbf{P}$.

Se considerarmos um segmento de reta AB e tomarmos um vetor v qualquer é possível encontrar o transformado de AB por translação? Qual será a medida deste segmento?

Aplicando-se o vetor v nos extremos A e B do segmento AB , obteremos como acima A' e B' os transformados de A e B , respectivamente. De modo análogo se pode levar a figura o segmento $\mathbf{A'B'}$ no segmento \mathbf{AB} por uma translação cujo vetor tem o mesmo tamanho, a mesma direção, porém com sentido contrário ao do vetor v . Vetor este que pode ser indicado por $(-v)$.

Deste modo, se pode verificar que a translação preserva a medida do segmento $A'B'$, isto é, a translação preserva a distância entre os pontos A e B do segmento AB . O que permite afirmar que $A'B'$ terá a mesma medida do segmento AB , ou seja, $A'B'$ é congruente a AB .

Desta forma, podemos representar como abaixo o segmento $A'B'$ como o transformado de AB pela translação de vetor v ,

$$A'B' = AB + v.$$

De modo análogo, dada uma figura plana F se for aplicada sobre ela uma translação de vetor v , obter-se-á a sua transformada F' que, conseqüentemente, será congruente a F ,

$$F' = F + v.$$

Dáí pode-se considerar as seguintes definições,

Definição 1.2: Dados dois segmentos AB e $A'B'$, se um pode ser obtido do outro por uma translação, diz-se que AB e $A'B'$ são congruentes.

Definição 1.3: Dadas duas figuras F e F' se uma pode ser obtida da outra por uma translação, diz-se que F e F' são congruentes.

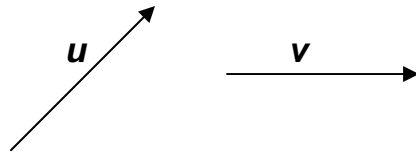
Como foi afirmado anteriormente, em relação ao segmento AB , por um raciocínio análogo pode-se obter a figura F de F' por uma translação de vetor oposto. Assim, se F' é o transformado de F por uma translação de vetor v , F é o transformado de F' por uma translação de vetor oposto a v ($-v$). Assim sendo, tem-se

$$F = F' + (-v) = F + v + (-v) = F$$

Ou seja, tem-se que F é congruente a si mesma. Deste modo, F é obtida de F por uma translação que leva cada ponto de F em si mesmo. Essa translação pode ser denominada translação de vetor nulo ou translação identidade ($v + (-v) = 0 = (-v) + v$; em que 0 é o vetor nulo).

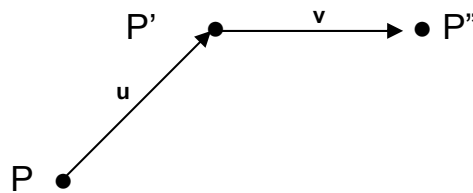
Atividade 1.1: construir um triângulo e obter o seu congruente por translação.

Consideremos agora um ponto Q , dois vetores fixos v e u , e as translações de Q realizadas a partir de v e u , como indicados abaixo



Obtenha P' o transformado de P por u e o transformado P'' de P' , isto é, de $(P+u)$ por v .

Utilizando-se os vetores u e v como estabelecidos, o ponto P'' será obtido diretamente de P da seguinte forma



Tem-se,

$$P' = P + u \text{ e } P'' = P' + v.$$

Segue-se que,

$$P'' = P' + v = P + u + v = P + (u + v).$$

Se indicarmos por w o vetor que leva P em P'' , teremos,

$$P'' = P + w.$$

Que se pode designar como translação de vetor w . E o vetor w denominado soma de vetores u e v , isto é, $w = u + v$.

Suponha agora a seguinte situação, um ponto P e a translação de vetor v . Pelo que já foi visto esta translação determina o ponto P' transladado de P . Aplique mais uma vez a translação de vetor v , agora, sobre o ponto P' . Obteremos por esta translação o ponto P'' transladado de P' . Que pode ser assim escrito,

$$P' = P + v,$$

como também, $P'' = P' + v,$

tem-se, substituindo P' nesta relação de P'' :

$$P'' = P' + v = P + v + v = P + 2v.$$

Conforme foi construída, a mesma translação que leva P em P' , leva P' em P'' . Assim, obtêm-se o vetor de comprimento $2\mathbf{v}$ que tem a mesma direção de \mathbf{v} , mas com comprimento igual ao dobro de \mathbf{v} . Nesta situação, pode-se dizer que o vetor $2\mathbf{v}$ é paralelo ao vetor \mathbf{v} e é o produto desse vetor por 2. Ou seja,

$$2\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{v}.$$

De modo análogo, pode-se encontrar os vetores $3\mathbf{v}$, $4\mathbf{v}$, $5\mathbf{v}$, ..., $\lambda\mathbf{v}$, com λ um número natural qualquer. No caso mais geral pode-se definir o produto de um vetor por um número real qualquer. Esta operação é designada multiplicação por escalar, tendo o vetor $\lambda\mathbf{v}$ a mesma direção do vetor \mathbf{v} . Conforme o sinal de λ , $\lambda\mathbf{v}$ o mesmo sentido de \mathbf{v} (se $\lambda > 0$) ou, sentido contrário ao de \mathbf{v} (se $\lambda < 0$).

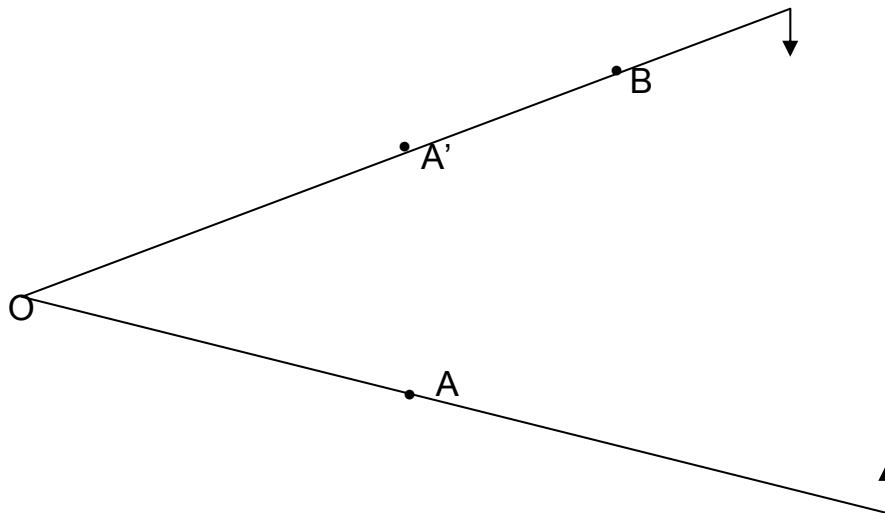
Atividade 1.2: construir o gráfico da função $y = x$ e obtenha o gráfico da função adicionando à ordenada y de cada ponto da função dada, um segmento de medida algébrica 2 paralelo ao eixo y (faça isso também com a mesma medida algébrica no sentido oposto). O que se obtém? Que conclusões podem ser tiradas?

Atividade 1.3: tome agora o gráfico da função $y = ax$ e acrescente a cada ponto de ordenada y do gráfico um segmento paralelo a y de medida algébrica b . Quais conclusões e relações podem ser extraídas com este procedimento?

2. Rotação no Plano

Considere sobre uma folha de papel A4 uma semi-reta OA , com origem em O e marque um ponto B , não pertencente a AO , e, a sua esquerda. Pegue agora uma tira de papel transparente, coloque sobre a semi-reta OA do papel A4 e desenhe sobre ela a semi-reta AO . Fixe com um alfinete a tira de papel transparente no ponto O e comece a girá-la na direção de B até que a semi-reta intercepte o ponto B .

Por este movimento a semi-reta OA é transportada até a uma semi-reta OB , de maneira que o ponto A é também transportado a um ponto A' sobre OB , obtendo-se a figura seguinte,



Realizada a atividade como descrita é possível observar que a distância de O a A' é igual a distância de O a A, ou seja,

$$OA' = OA$$

O movimento realizado acima é denominado **rotação** e o ângulo AOA' de **ângulo de rotação**. Correspondente a região resultante da interseção dos semi-planos inferior e superior determinados respectivamente por as semi-retas OB e AO, que denominaremos região interior.

Definição 2.1: Uma rotação corresponde a uma translação de ângulo fixo (por exemplo, θ (teta)), ou simplesmente, e, é uma relação que a cada ponto P do plano faz corresponder um ponto P' desse mesmo plano, de maneira que

$$P' = P + \theta.$$

Considere agora um círculo de centro O e raio r na folha de papel A4. Marque sobre a circunferência na folha A4 dois pontos P e P', distintos de modo que $r \neq OP$. Desenhe o mesmo círculo de centro O e raio r , na folha de papel transparente, fixe o círculo desenhado na folha de papel transparente sobre o círculo da folha A4 com um alfinete fixado nos dois centros. Agora gire a folha de papel transparente de modo que o

círculo desenhado no papel transparente gire sobre o outro até que o raio r coincida com o ponto P' .

Este movimento é chamado de rotação do círculo em torno do centro O . O ângulo POP' é o ângulo dessa rotação e o ponto O é o centro da rotação.

Definição 2.2: Uma rotação do círculo corresponde a uma translação de ângulo fixo (por exemplo, θ (teta)), de um ponto P do círculo de maneira que a cada ponto P do círculo faz corresponder um ponto P' desse mesmo círculo, de maneira que

$$P' = P + \theta.$$

Agora, com um lápis de cor pinte a região interior determinada pelo ângulo POP' , na folha de papel transparente. Agora gire a folha de papel transparente no sentido contrário ao movimento anterior, até que o raio OP' coincida novamente com OP .

Observe que o raio OP anterior intercepta o círculo em um outro ponto que denominaremos por Q . Assim o movimento que leva o ponto P no ponto Q é também uma rotação de centro O , mas de ângulo POQ , com sentido contrário à rotação que determinou P' (rotação de centro O e ângulo POP').

As rotações de centro O como as determinadas acima tanto num sentido como no outro são denominadas: rotação de *sentido positivo* (sentido anti-horário), quando esta for realizada no sentido do ponto P' originando o ângulo POP' ; e, rotação de *sentido negativo* (sentido horário), quando esta for realizada no sentido do ponto Q , determinando o ângulo POQ .

Atividade 2.1: Determinar rotações específicas: 1. Que transporte o ponto P a um ponto A na circunferência de maneira que o raio AO fique perpendicular ao raio OP ; 2. Que transporte o ponto P a um ponto B de maneira que o raio OB fique diametralmente oposto ao raio OP .

Essas rotações são respectivamente *rotação de ângulo reto* e *rotação de ângulo raso*.

Assim como no caso das translações é possível se obter figuras congruentes por rotação de ângulo fixo. Neste sentido, realize a tarefa abaixo e verifique o que está proposto.

Atividade 2.2: Construir um triângulo e obter o seu congruente por rotação de ângulo fixo (escolha o ângulo de rotação que lhe interessar).

Considere um círculo de centro O e raio $r = OB$ e dois pontos distintos P e Q (em qualquer lugar sobre a circunferência, Q posterior a P , no sentido anti-horário). Considere, agora, a rotação de sentido positivo que transporta B até P e denomine por θ (teta), assim como a rotação positiva que leva B em Q e chame de β (beta). Como será interpretada e representada essa rotação no sentido positivo que leva B a Q ?

Observe que a região determinada pelo ângulo BOQ corresponde exatamente às regiões determinadas pelos ângulos BOP e POQ simultaneamente. Assim temos que,

$$BOQ = BOP + POQ.$$

Ou seja, a rotação de centro O e ângulo BOQ é a *soma das rotações de mesmo centro O e ângulos BOP e POQ* .

Definição 2.2: Uma soma de ângulos consecutivos ou não corresponde a uma translação de ângulos fixos (por exemplo, θ e β) realizadas sobre um ponto do plano. Ou simplesmente, é uma relação que a cada ponto P do plano faz corresponder um ponto P' desse mesmo plano de maneira que

$$P' = P + (\theta + \beta).$$

De acordo com as posições de P e Q sobre a circunferência diga se o ângulo BOQ obtido é reto (medida igual a noventa graus); ou, agudo (medida menor que o ângulo reto); ou, obtuso (medida maior que um ângulo reto, 90°); ou ângulo raso (medida maior que um ângulo reto e de valor exatamente igual a 180°).

Para encerrar deixo como atividades,

Atividade 2.3: Verificar a medida do ângulo obtida pela rotação positiva de dois ângulos retos.

Atividade 2.4: Verificar a medida do ângulo obtida pela rotação positiva de um ângulo reto e simultaneamente de um ângulo raso (ou vice-versa).

Atividade 2.5: Verificar também a medida do ângulo obtida pela rotação simultânea, no sentido anti-horário, de dois ângulos rasos.

BIBLIOGRAFIA

CATUNDA, Omar et al. *Matemática*, v. 7, Editora e ano da obra não referidos.

_____. *Matemática*, v. 8, editora e ano da obra não referidos.

_____. *Matemática 2^o ciclo*: ensino atualizado, v.1, LTC, Rio de Janeiro, 1971.