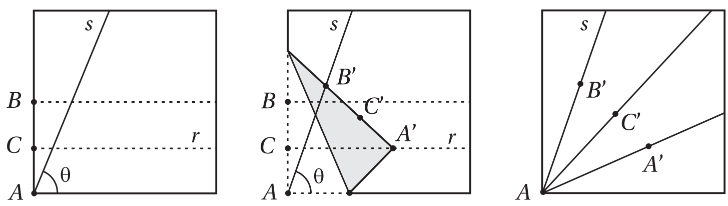
Matemática *versus* origami: trissecção de um ângulo agudo

Hideo Kumayama

A trissecção de um ângulo qualquer é um dos três problemas clássicos da Matemática grega que têm sido motivo de inquietações dos matemáticos de diversas vertentes, desde os tempos de Hippias de Elis (séc. V a.C.) até os dias atuais (ver, por exemplo, RPM 51, p. 17, ou RPM 66, p. 34). O mundo origamístico também tem a sua participação nesse problema: segundo [1], Abe descobriu, em 1970, o método da trissecção de um ângulo através do origami e mais tarde outros métodos de trissecção foram descobertos independentemente (ver [1] e [2]).

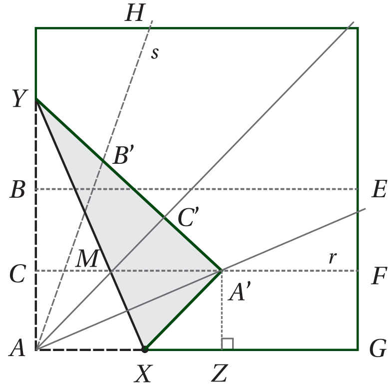
A RPM 64 (problema 267, p. 48) apresenta uma variação muito interessante do método da trissecção de Abe: "Numa folha quadrada de papel desenhe ou dobre um ângulo θ, marque a metade da folha e a metade da metade. Dobre a folha de modo que A caia em um ponto A' pertencente a r e B em um ponto B' pertencente a s (ver figura). Marque os pontos A', B' e C', o correspondente a C na dobra. Prove que AB', AA' e AC' trisseccionam o ângulo θ".



Testando vários ângulos, verificamos que o método usado na solução do problema 267, apresentada na RPM 66, pág. 47, de fato funciona para valores de θ, por exemplo, maiores que 45°. Entretanto, experimentando o método para ângulos pequenos, verificamos que o ponto A' cai fora do papel quadrado e o método não funciona (em um papel quadrado). Vejamos o que acontece.

Se ℓ é o lado do quadrado, pela construção temos

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{3} = \frac{A'Z}{AZ} = \frac{\frac{1}{4}\ell}{CA'} = \frac{\ell}{4CA'}.$$



Logo, se $\operatorname{tg}\frac{\theta}{3} = \frac{1}{4}$, ou seja, $\theta = \theta_0 = \operatorname{arctg}(\frac{1}{4}) \cong 42{,}108°$, teremos $\ell = CA'$ e o ponto A' cairá na borda do papel.

Se $\operatorname{tg}\frac{\theta}{3} > \frac{1}{4}$, ou seja, $\theta > \theta_0$, então, $CA' < \ell$ e o ponto A' cairá em r, dentro do papel quadrado.

Se $\operatorname{tg}\frac{\theta}{3} < \frac{1}{4}$, ou seja, $\theta < \theta_0$, então, $CA' > \ell$ e o ponto A' cairá em r, fora do papel quadrado.

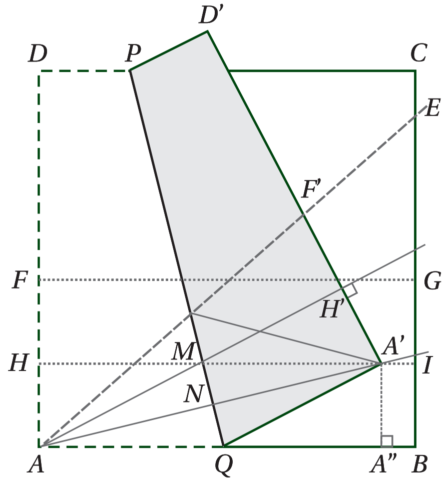
Observando que $\operatorname{tg}\frac{45°}{3} = \operatorname{tg}15° = \frac{1-\cos 30°}{\operatorname{sen}30°} = 2-\sqrt{3} > \frac{1}{4}$, vem que $\theta_0 < 45°$ e a contrução no papel quadrado é possível, em particular, para $45° \leq \theta < 90°$.

Como trisseccionar um ângulo menor que 45º apenas com dobras num papel quadrado?

Mostremos que isso pode ser feito com uma modificação no método apresentado na RPM 66.

No papel quadrado *ABCD* vinque *AE*, *E* pertencente ao lado *BC*, obtendo o ângulo α. No ponto médio da distância de *E* ao lado *AB*, faça o vinco *FG*, paralelo a *AB*. Vinque *HI* paralelo a *AB*, pelo ponto médio de *AF*. A seguir, dobre de modo que *F* caia sobre *F'*, pertencente a *AE*, e o vértice *A* caia sobre *HI*, em *A'*. Marque o ponto *H'*, correspondente a *H* na dobra.

a) Mostremos que AF', AH' e AA' trisseccionam o ângulo α, $\alpha < 45°$.



Considerando o eixo de simetria PQ, temos que os triângulos AQM e $A'QM$ são congruentes. Dessa congruência e do paralelismo dos segmentos AB e HI podemos concluir que os ângulos $\widehat{A'QA''}$, $\widehat{MAQ}$ e $\widehat{QA'M}$ são congruentes e que o quadrilátero $A'MAQ$ é um losango. Da congruência dos triângulos retângulos HMA e $H'MA'$ podemos concluir que A, M e H' são colineares.

Como $H'A$ e $F'A'$ são perpendiculares pelo ponto médio H', podemos afirmar que o triângulo $F'AA'$ é isósceles. Como a diagonal maior do losango, AA', está contida na bissetriz do ângulo $\widehat{H'AQ}$ e a altura $H'A$ do triângulo isósceles $F'AA'$ está contida na bissetriz do ângulo $\widehat{F'AA'}$, obtemos

$$m(\widehat{EAB}) = 3m(\widehat{EAH'}) = 3m(\widehat{H'AA'}) = 3m(\widehat{A'AB}).$$

b) Mostremos, então, que essa construção pode ser feita dentro do papel quadrado.

Fazendo $\alpha = 3x$ com $0^\circ < 3x < 45^\circ$ ou $0^\circ < x < 15^\circ$, seja ℓ o lado do quadrado e $\ell' = EB$. Então, $\ell' = \ell\,\mathrm{tg}(3x)$ e, por outro lado, $\mathrm{tg}\,x = \dfrac{A'A''}{AA''} = \dfrac{\frac{1}{4}\ell'}{HA'}$; portanto, $HA' = \dfrac{\ell'}{4\mathrm{tg}(x)} = \dfrac{\ell\mathrm{tg}(3x)}{4\mathrm{tg}(x)}$.

Logo, A' cai no papel quadrado se e somente se $\dfrac{\mathrm{tg}(3x)}{4\mathrm{tg}(x)} < 1$ ou $\dfrac{4\mathrm{tg}(x)}{\mathrm{tg}(3x)} > 1$.

Sendo $\mathrm{tg}\,3x = \dfrac{3\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}^3 x}{1 - 3\mathrm{tg}^2 x}$ e $3 - \mathrm{tg}^2 x > 0$ e $\mathrm{tg}\,x > 0$ no intervalo considerado, temos

$$\frac{4\mathrm{tg}(x)}{\mathrm{tg}(3x)} > 1 \Leftrightarrow \frac{4\mathrm{tg}(x)(1-3\mathrm{tg}^2 x)}{3\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}^3 x} > 1 \Leftrightarrow \frac{4(1-3\mathrm{tg}^2 x)}{3-\mathrm{tg}^2 x} > 1 \Leftrightarrow$$

$$4(1-3\mathrm{tg}^2 x) > 3 - \mathrm{tg}^2 x \Leftrightarrow 11\mathrm{tg}^2 x < 1 \Leftrightarrow \mathrm{tg}(x) < \frac{1}{\sqrt{11}}.$$

Como $\operatorname{tg}15^\circ = \dfrac{1-\cos 30^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = 2-\sqrt{3} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} < \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{12}} < \dfrac{1}{\sqrt{11}}$, a desigualdade é verdadeira para $0^o \le x \le 15^o$.

Observação

Quando o ângulo α a ser trisseccionado for muito pequeno, teremos dificuldades com o método anterior. Uma alternativa é transformar o problema na trissecção do seu complementar θ, maior que 45^o, usando o método de construção sugerido na solução do problema 267. Em seguida, basta subtrair $\theta/3$ de 30^o, sendo a subtração um procedimento simples por dobraduras.

Nota: Agradeço aos professores Daniel Victor Tausk (IME-USP) e Severino do Rego Melo (IME-USP) pela colaboração na redação deste texto.

Referências bibliográficas

[1] Demaine, E. et all. *Geometric Folding Algorithms: linkages, origami, polyhedra* (Geometric Constructtibility, p. 285). NY: Cambridge University Press, 2007.

[2] Hull, T. *Project origami: activities for exploring mathematics*. Wellesley, MA: A K Peters, 2006.