UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
5º ENCONTRO DA RPM
(03 e 04 de junho de 2011)

UFBA

Teorema de Pitágoras: mais que uma relação entre áreas

Prof. Fabio Araujo

"Todas as coisas são números".
Pitágoras

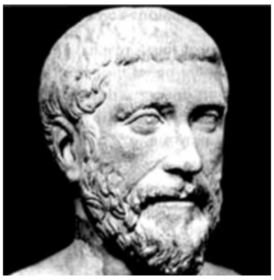
Introdução

Atualmente, percebemos um grande desinteresse dos alunos com a disciplina de matemática. Diante disto, acredito que cabe ao professor buscar por atividades, problemas criativos e desafiadores, na tentativa de estimular seus alunos nas aulas de matemática. Certamente, isso possibilitará a capacidade de comprovar e provar afirmações, pensar analiticamente e criticamente, despertando um maior interesse pela disciplina.

Neste mini-curso, apresento diversas demonstrações do Teorema de Pitágoras, algumas propriedades interessantes, alguns jogos, algumas aplicações, algumas construções geométricas associadas ao triângulo retângulo, sua relação com a trigonometria e diversos problemas criativos, intrigantes e desafiadores que já apareceram em concursos e olimpíadas.

Um pouco de História

O filósofo grego Pitágoras nasceu na ilha de Samos provavelmente em 570 a.C. , cerca de 50 anos depois do nascimento o de Tales de Mileto. Filho de rico comerciante pôde viajar pelo Egito, pela Babilônia e talvez tenha ido até a Índia.



Ao voltar para a Grécia, fixou-se em sua terra natal, mas, descontente com as arbitrariedades do governo de Samos, transferiu-se para Cróton, uma colônia grega situada na Itália. Lá, ele fundou a escola Pitagórica. Nessa escola, estudava-se religião, Filosofia, Política, Música, Astronomia e Matemática. Seus alunos eram divididos em duas categorias: os alunos dos três primeiros anos eram chamados *ouvintes* e os alunos dos anos seguintes, *matemáticos*. Somente aos últimos eram revelados os segredos da matemática. Aliás, a origem da palavra matemática (que significa “o aprendizado da arte, da ciência”) é atribuída a Pitágoras.

O lema da escola pitagórica era “Tudo é número”. Eles procuravam explicar tudo que existe na natureza através dos números. Os pitagóricos formaram uma sociedade cujo emblema era o pentágono estrelado – ou pentagrama. A única aspiração deles era o conhecimento. Os estudos dos pitagóricos trouxeram grandes contribuições para a Matemática, principalmente na Geometria. Entre essas contribuições, a de maior sucesso foi sem dúvida o conhecido teorema de Pitágoras.

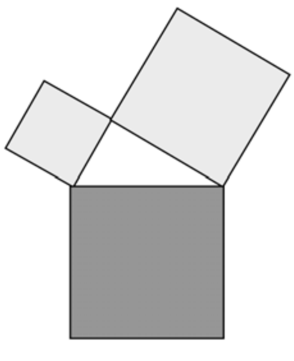
Mesmo depois da morte de Pitágoras, ocorrida por volta de 500 a.C., a sociedade dos pitagóricos continuou a existir por mais de quatro séculos.

Na Babilônia

Existem provas concretas de que os babilônios conheciam o teorema de Pitágoras. Vários tabletes de barro datados do período 1800 a 1600 a.C. foram encontrados, decifrados e até hoje se encontram em diversos museus. Um deles é o Plimpton (figura ao lado e abaixo)

O Plimpton 322 recebe esse nome porque é o número 322 na coleção GA Plimpton na Universidade de Columbia, é uma tabela de quatro colunas que, inicialmente, parece ser registro de uma transação comercial. Entretanto, ao ser analisado com mais cautela revelou algo bem diferente: é uma lista de terna pitagóricas.

O que diz o Teorema de Pitágoras?



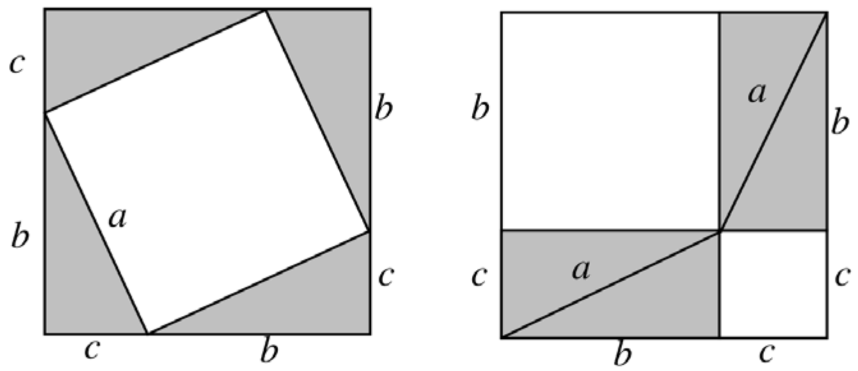
Em todo triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados que tem como lados cada um dos catetos. O teorema de Pitágoras é uma relação entre áreas. Ele afirma que a área em tom mais escuro é igual à soma das duas áreas em tom mais claro.

ALGUMAS DOMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Como na escola pitagórica suas descobertas eram pouco divulgadas, fica difícil saber qual foi a demonstração dada por seus membros ao teorema de Pitágoras. O professor de matemática norte-americano Elisha Scott Loomis durante 20 anos colecionou demonstrações do Teorema de Pitágoras e organizou o livro A Proposição de Pitágoras (T*he Pythagorean Proposition*). Somente a primeira edição tinha 230 demonstrações, na segunda, 370 demonstrações. Hoje existem por volta de 400 demonstrações. Loomis classifica as demonstrações em algébricas, baseada nas relações métricas nos triângulos retângulos; e em geométricas, baseada em comparações de áreas. Vejamos algumas destas demonstrações.

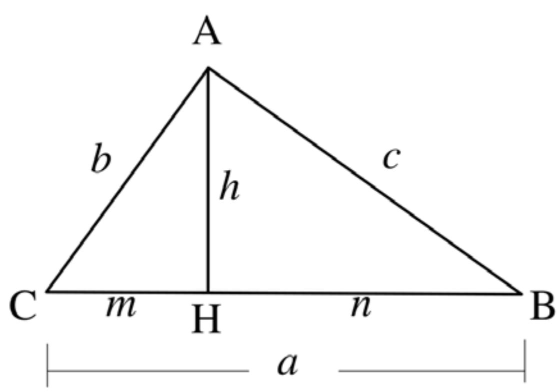
A demonstração clássica

Presume-se que esta seja a demonstração feita por Pitágoras.

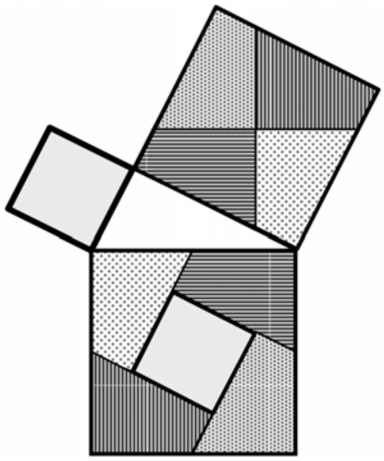


Uma das demonstrações mais utilizadas hoje (usa semelhança)

Essa talvez seja a demonstração mais freqüente. A partir do triângulo retângulo ABC, retângulo em A, traçamos a altura AH e verificamos que os triângulos AHB e AHC são semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo ABC.



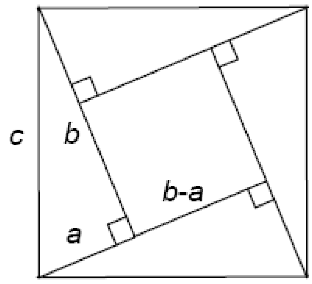
A demonstração de Perigal



Henry Perigal, um livreiro em Londres, publicou em 1873 a demonstração que podemos ver ao lado. Foi uma forma simples de mostrar que a soma dos quadrados construídos sobre os catetos é igual ao quadrado da hipotenusa

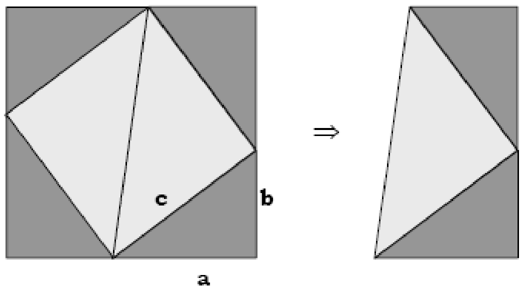
A demonstração de Bhaskara

Outra demonstração, também obtida da decomposição do quadrado, é atribuída a Bhaskara, matemático hindu do Século XII. Bhaskara teria apenas desenhado a figura e escrito "Veja!", sem dar maiores explicações.



A demonstração do Presidente

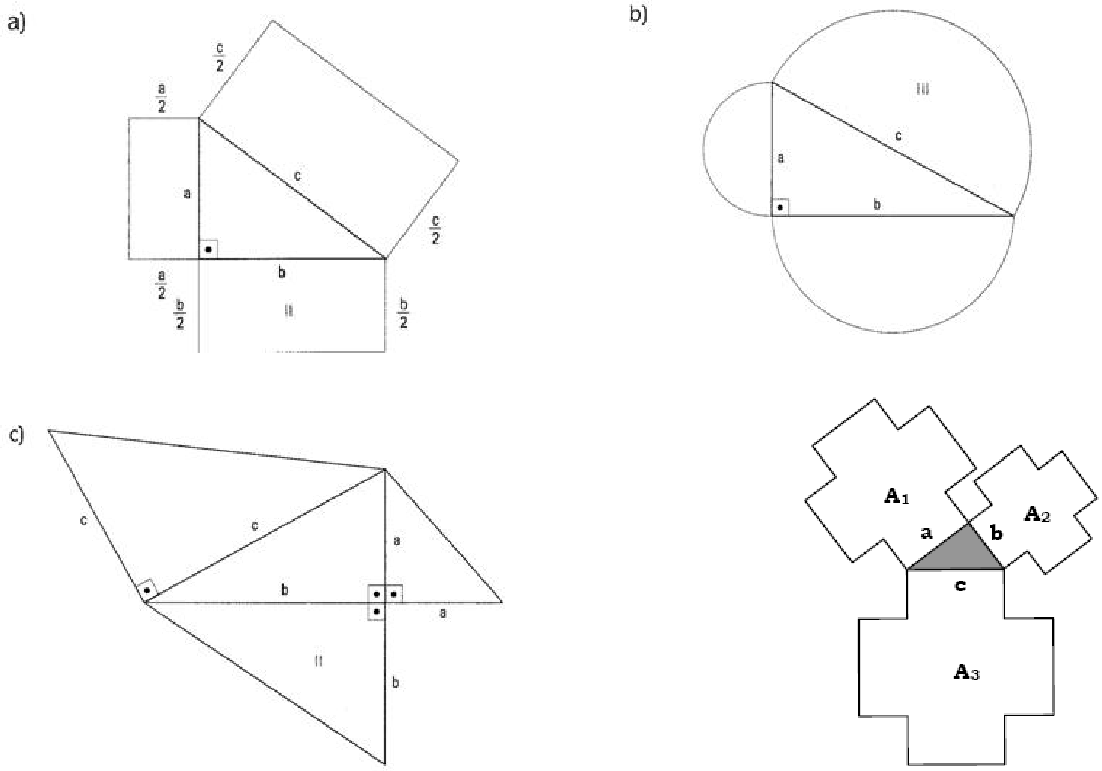
Elisha Scott Loomis registrou num livro 370 demonstrações desse teorema. Uma delas é atribuída ao general americano James Abram Garfield (1831-1881), que foi o 202 presidente dos Estados Unidos, no período de 4 de março a 19 de setembro de 1881, quando faleceu.



Ele partiu de um trapézio retângulo, dividido em três triângulos retângulos.

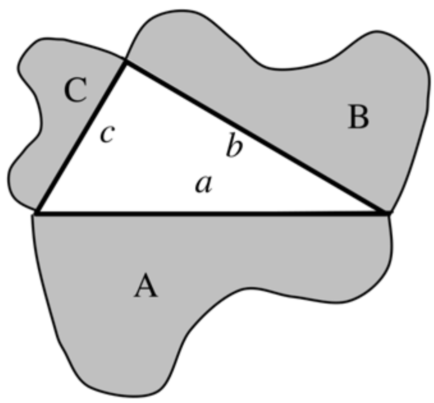
O TEOREMA DE PITÁGIORAS PARA OUTRAS FIGURAS

O teorema de Pitágoras não é válido apenas para a área dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo, mas para muitas outras figuras planas. Verifique, algebricamente, sua validade para as figuras. Parta do princípio que: $c^2 = a^2 + b^2$.



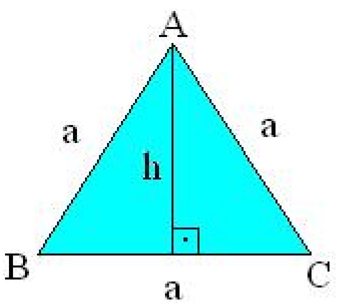
Teorema de Pitágoras para figuras semelhantes

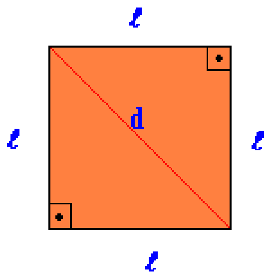
O Teorema de Pitágoras vale não somente para quadrados, círculos, semicírculos, triângulos, retângulos construídos sobre os lados do triângulo retângulo. Esta importante relação entre áreas vale para quaisquer figuras semelhantes construídas sobre a hipotenusa e sobre os catetos.

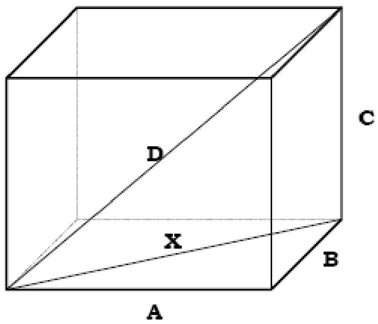


APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Altura de um triângulo eqüilátero, Diagonal do quadrado e Diagonal do Paralelepípedo







TERNOS PITAGÓRICOS

Chamamos de terno pitagórico ao trio formado por três números inteiros positivos a, b e c onde $a^2 + b^2 = c^2$. Um terno pitagórico é primitivo quando os três números (a, b, c) são primos entre si. Os primeiros ternos pitagóricos primitivos são: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 15, 17), (9, 40, 41), (11, 60, 61), (12, 35, 37), (13, 84, 85), (16, 63, 65), (20, 21, 29)... . Os ternos pitagóricos têm uma propriedade interessante: Se (a, b, c) é um terno pitagórico, então (ma, mb, mc) também será um terno pitagórico (m inteiro positivo).

Euclides num de seus livros, dedicado à Teoria dos Números, mostrou que existem infinitos ternos pitagóricos primitivos. E mais, ele encontrou uma fórmula que gera todos os ternos pitagóricos primitivos. Vejamos:

Dados dois números inteiros positivos m e n $(m > n)$, o terno (a, b, c) onde $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$, é pitagórico. Além disso, se m e n são primos entre si, o terno é primitivo.

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

As construções geometricas com régua e compasso já apareciam na época dos pitagóricos e foram muito importantes no desenvolvimento da matemática grega. Como para os gregos número só era usado para inteiros, muitas grandezas eram associadas a segmentos de reta. Nesse Período muitos problemas de álgebra eram resolvidos através da geometria. Na verdade, a solução era construída.

Atualmente, as Construções geometrias estão cada vez mais ausentes dos livros didáticos e do ensino de geometria. Alguns problemas de construção são interessantes e motivadores além de ser um importante instrumento auxiliar para o ensino de geometria.

1) Conhecendo dois catetos com medidas a e b construa um triângulo retângulo.

2) Conhecendo a hipotenusa e uma dos catetos de medidas a e b, respectivamente, construa um triângulo retângulo.

3) Conhecendo a altura e a hipotenusa de medidas h e a, respectivamente, construa um triângulo retângulo.

4) Sendo a e b segmentos dados, construa o segmento $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

5) Sendo a e b segmentos dados, construa o segmento $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

6) Sendo a, b e c segmentos dados, construa o segmento $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

7) Sendo a segmento dado, construa o segmento $x = a\sqrt{2}$.

8) Sendo a segmento dado, construa o segmento $x = a\sqrt{21}$.

9) Dados os segmentos a, b e c, construa o segmento $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$.

10) Dados os segmentos a e b construa o segmento $x = \sqrt{2a^2 + 3b^2}$.

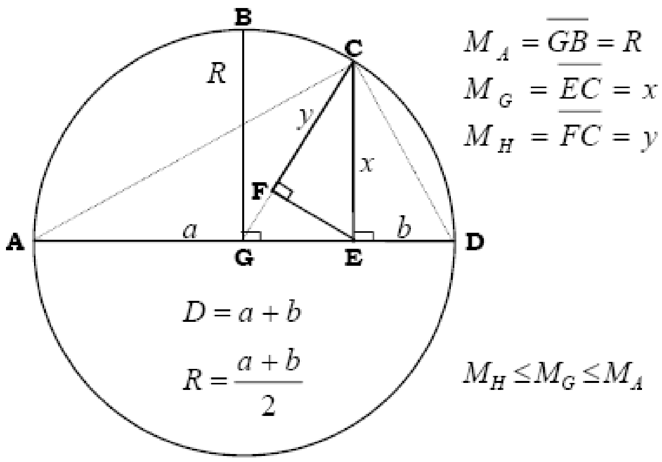
PITÁGORAS E AS TRÊS MÉDIAS

O Teorema de Pitágoras pode ser usado para visualizar geometricamente três médias estatísticas: a média aritmética, a média geométrica e a média harmônica. Sendo a e b dois números positivos, temos que:

Média Aritmética ➔ $M_a = \dfrac{a+b}{2}$

Média Geométrica ➔ $M_g = \sqrt{a.b}$

Média Harmônica ➔ $M_h = \dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} = \dfrac{2ab}{a+b}$



Acima temos as definições das principais médias estatísticas apenas para dois números. De maneira geral, média aritmética, goemétrica e harmonica para múltiplos números são definadas por.

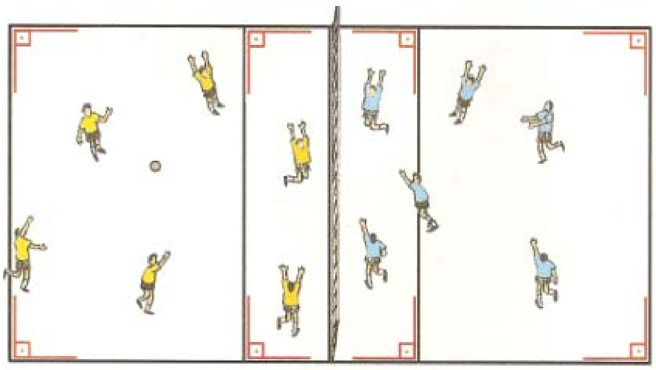
Média Aritmética ➔ $M_a = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$

Média Geométrica ➔ $M_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$

Média Harmônica ➔ $M_h = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i}}$

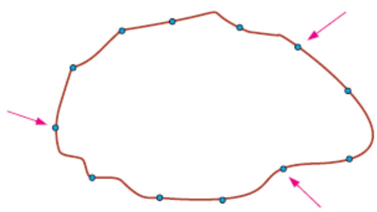
ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Se observarmos a nossa volta veremos a quantidades de ângulos de 90º. Eles aparecem nas construções de prédios, nas vidraças, nos móveis, nos postes de energia elétrica, no formato da maioria dos livros, nos pisos, nos campos de futebol, nas quadras poli esportivas.



Alicerce da casa

Documentos comprovam que os Egípcios e os Babilônicos conheciam casos particulares do Teorema de Pitágoras. Documentos datados de mais de 1000 anos a.C. comprovam que na Índia sabia-se que o triângulo de lados 3, 4 e 5 era retângulo. Alguns historiados afirmavam que, no Egito Antigo, os agrimensores usavam o triângulo de lados 3, 4 e 5 em uma corda com 12 nós (separados igualmente 3 + 4 + 5) para fazer ângulos retos.

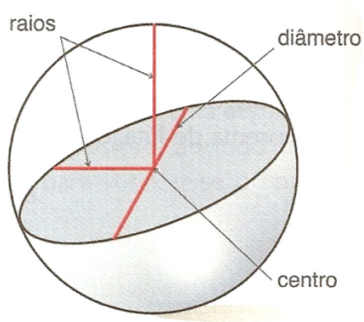


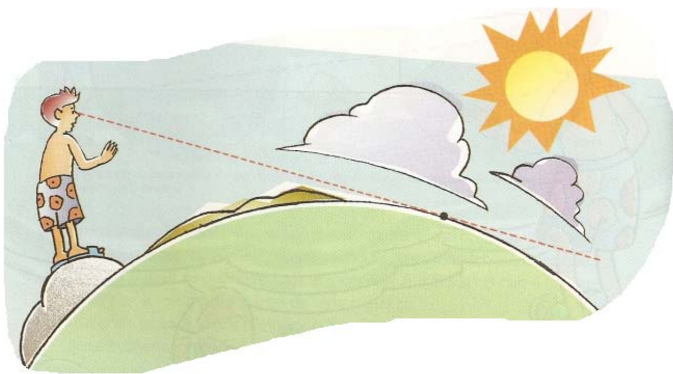
Para construir uma casa, além de todo planejamento inicial, deve-se marcar o terreno de acordo com a planta. Em geral, as paredes devem estar esquadrejadas (formar cantos com ângulos retos). Porém como marcar esses ângulos retos?

O homem egipcio já conhecia que a terna pitagórica 3, 4 e 5 e que esse trio formava um triângulo retângulo. Logo esticava uma a corda, conforme a figura, e marcavam-se os ângulos retos. Assim, mesmo não conhecendo formalmente o Teorema de Pitágoras foi possível construções como as pirâmides do Egito entre outras.

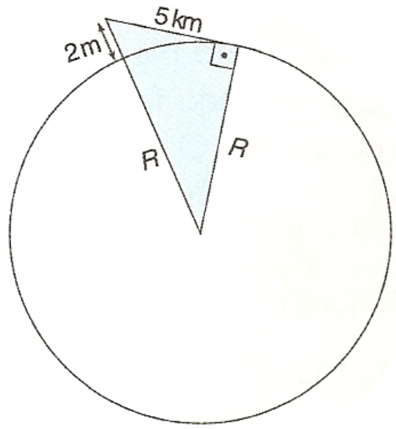
Raio da Terra

Há mais de 2000 anos matemáticos e astrônomos procuravam desenvolver métodos para calcular as dimensões da terra dentre estas o seu raio. Muitos métodos foram desenvolvidos, mas poucos deles conseguiram destaque por conta de imprecisões. O método que ganhou maior destaque foi um que utilizava o Teorema de Pitágoras. A idéia é simples e muito criativa, vejamos:





Inicialmente imagine uma praia. Se olhar o mar você vê a linha do horizonte, que é o lugar onde o mar e o céu parecem encontrar, o lugar que os barcos desaparecem mar adentro devido à curvatura da terra. Suponha que você esteja na praia a 2 m de altura e que um barco saia em linha reta numa rota perpendicular a linha da praia. Em seguida, meça distância entre a praia e o horizonte. Supondo que esta distância seja 5 km fica fácil calcular o raio da terra.



De acordo com estes cálculos chegou-se a conclusão que o raio da terra era de 6250 km. Métodos atuais e bem mais modernos chegaram a um valor de 6375 km. Daí, o resultado encontrado utilizando o Teorema de Pitágoras era bastante próximo do valor calculado através dos métodos atuais.

TRANSMISSÕES VIA SATÉLITE

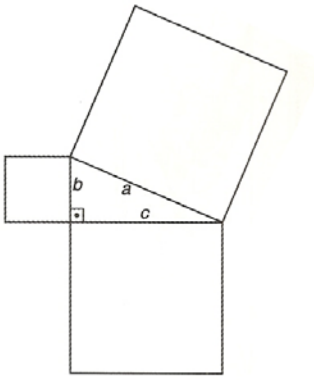
Em meados do século passado ninguém podia ver, por exemplo, transmissões de jogos ao vivo. Se um aparelho de TV estivesse a mais de 100 km da estação transmissora não conseguia captar as imagens devido o fato de a terra ser curva. Os sinais eram transmitidos e perdiam-se no espaço.

Atualmente, é possível assistir jogos transmitidos ao vivo de qualquer ponto do planeta terra. Isso é possível graças ao grande avanço da ciência em especial das leis de Kepler que descrevem as órbitas dos planetas. Com esses conhecimentos foi possível desenvolver foguetes, satélites que giram em torno da terra para onde os sinais de TV são transmitidos e de lá reenviados para qualquer canto do planeta. Todas essas descobertas científicas e tecnológicas foram possíveis graças aos conhecimentos de geometria sobre triângulos, em especial, sobre triângulos retângulos e, conseqüentemente, a Pitágoras.

O Teorema de Pitágoras teve um papel fundamental no desenvolvimento cientifico e tecnológico não só pela sua aplicação, mas, por ter despertado o espírito investigativo. Pitágoras, bem como a sociedade pitagórica, iniciou diversas investigações relacionadas aos números. Embora muitas delas não tenham chegado a lugar algum, incentivou a pesquisa de outros cientistas e continua até os dias atuais mudando o mundo.

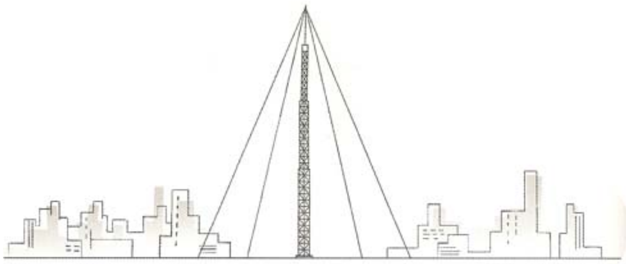
ALGUNS PROBLEMINHAS SOBRE O TEOREMA DE PITÁGORAS

1) Aprendemos que, num triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.



Agora, pense nisso: o perímetro do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma dos perímetros dos quadrados construídos sobre os catetos? Justifique sua resposta.

2) Uma antena retransmissora de sinais de rádio, instalada em um terreno plano horizontal, tem 84 m de altura e é sustentada por alguns cabos de mesmo comprimento, firmemente esticados, como mostra o desenho.



As extremidades dos cabos foram fixadas a 25 m da base da antena. Qual é o comprimento de cada cabo?

3) Para executar um serviço de laje de casa, o trabalhador apoio a escada de 4,3 m de comprimento, como mostra o esquema.

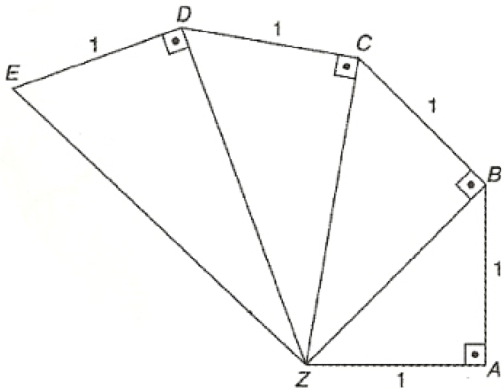
A base da escada, apoiada sobre um piso horizontal, está afastada 1,8 m da parede. Qual é a altura aproximada da construção?

4) Observe a figura seguinte. Note que sua construção obedece um padrão.

Suponha que os segmentos $\overline{ZA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$ meçam cada um 1 cm.

a) Calcule as medidas dos segmentos $\overline{ZB}$, $\overline{ZC}$, $\overline{ZD}$ e $\overline{ZE}$.

b) Você percebeu que padrão orienta a construção da figura anterior? Pois bem: mantendo esse padrão, quais serão as medidas dos segmentos $\overline{ZF}$, $\overline{ZG}$, $\overline{ZG}$, ... ?

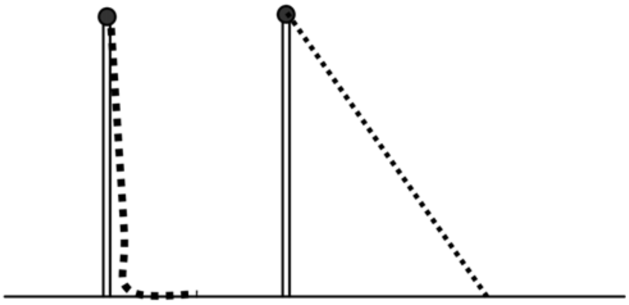


5) Imagine um triângulo cujos lados medem 140 cm, 48 cm e 148 cm. Será que esse triângulo é retângulo? Justifique sua resposta.

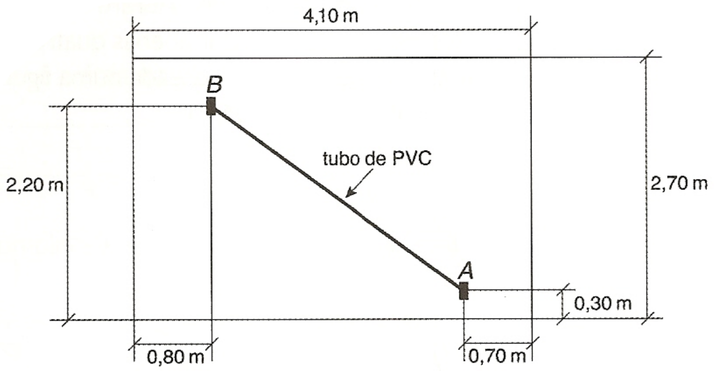
6) Determine o raio da circunferência circunscrita a um triângulo isósceles de base 8 e altura 10.

7) O antigo livro chinês Jiuzhang suanshu contêm 246 problemas.

Para solução de alguns deles, é necessário o uso do gou gu, ou seja, do teorema de Pitágoras. Veja um desses problemas traduzido do capítulo 9 do Jiuzhang. No alto de um bambu vertical está presa uma corda. A parte da corda em contato com solo mede 3 chih. Quando a corda é esticada, sua extremidade toca o solo a uma distância de 8 chih do pé do bambu. Que comprimento tem o bambu?

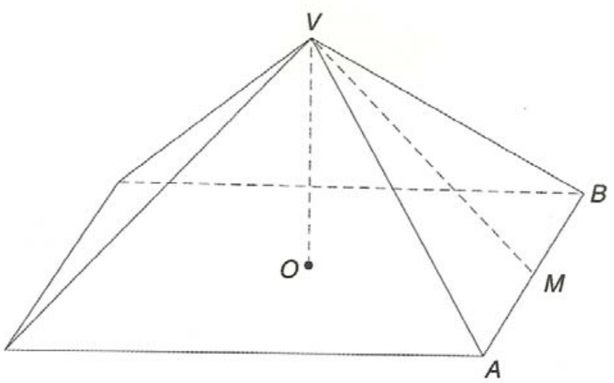


8) Para executar uma instalação, o eletricista fez este esquema:

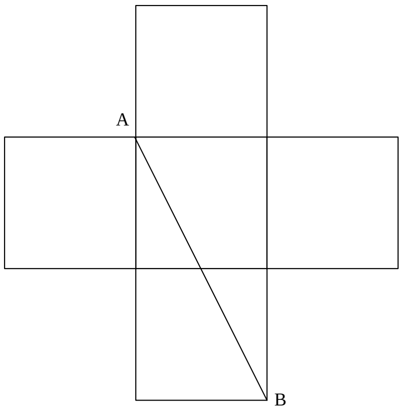


No ponto A da parede já existe uma tomada com energia elétrica. Um novo ponto de energia será instalado em B. Para isso, um tubo de PVC (por onde passarão os fios) será embutido na parede, de A até B. Qual deverá ser o comprimento do tubo?

9) Numa de suas aventuras, o explorador Diana Tones descobre uma pirâmide, até então desconhecida. Curioso por saber que altura tem a pirâmide ele mede o comprimento do lado de sua base quadrada, obtendo $\overline{AB} = 110\ m$. A seguir, subindo pela encosta do monumento, mede a distância de seu vértice superior V até o ponto médio M do lado da base. Ele obteve $\overline{VM} = 80\ m$. Com essas informações, Diana Tones pretende calcular a altura $\overline{VO}$ da pirâmide. Aceite o desafio: antecipe a ele e descubra essa altura.



10) O jardim da casa de Maria é formado por cinco quadrados de igual área e tem a forma da figura abaixo. Se $\overline{AB} = 10\ m$, então a do jardim, em metros quadrados, é igual a:



a) 200

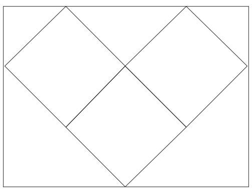
b) $10\sqrt{5}$

c) 100

d) $\frac{500}{3}$

e) $\frac{100}{3}$

11) A figura abaixo é formada por três quadrados de lado 1 e um retângulo que os contorna.



Sendo assim, a área do retângulo é:

a) $3\sqrt{2}$

b) $4\sqrt{2}$

c) 6

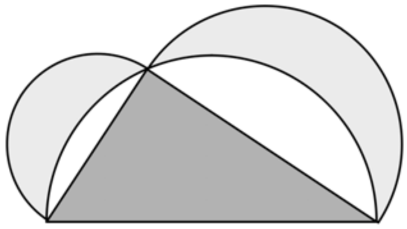
d) $6\sqrt{2}$

e) 8

12) Se $a, b\ e\ c$ inteiros positivos com $b < c < a$ dizemos que (b, c, a) é um terno pitagórico se $a^2 = b^2 + c^2$. Sabendo que $b = 2k + 1$, $c = 2k^2 + 2k$, $a = 2k^2 + 2k + 1$, onde k é um inteiro positivo, mostre que (b, c, a) é um terno pitagórico.

13) O problema de Hipócrates

A figura a seguir mostra um triângulo retângulo e três semicircunferências tendo os lados como diâmetros. Mostre que a soma das áreas das duas "lúnulas" sombreadas é igual a áreas do triângulo.



14) Determine o raio da circunferência circunscrita ao triângulo cujos lados medem $6cm$, $6cm$ e $4cm$.

15) É dado um quadrado $ABCD$ de lado a. Determine o raio da circunferência que contém os vértices A e B e é tangente ao lado $\overline{CD}$.

16) Um helicóptero sai de um ponto P do solo e fez os seguintes movimentos sucessivos: $500\,m$ verticalmente para cima, $900\,m$ horizontalmente na direção norte, $200\,m$ verticalmente para cima, $700\,m$ horizontalmente na direção oeste e $100\,m$ verticalmente para baixo, pousando no ponto M de uma montanha próxima. Qual a distância aproximada entre $P\ e\ M$?

17) Chamam-se "ternos pitagóricos" qualquer terno (a, b, c), de números inteiros positivos tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Assim, observa-se que a relação que Pitágoras encontrou não é apenas entre catetos e hipotenusa, mas entre números inteiros, o que é coerente com sua crença de que "tudo é número ou a ele se assemelha". Se $(19,\ 2k^2 + 2k,\ 2k^2 + 2k + 1)$ é um terno pitagórico, então o valor positivo de k é:

a) par

b) divisível por 5

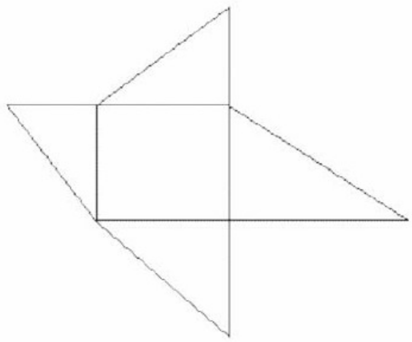
c) múltiplo de 7

d) quadrado perfeito

e) primo

18) ***Os triângulos pitagóricos e o perímetro da fazenda***

Uma grande fazenda tem uma forma que pode ser visualizada como um quadrado e quatro triângulos retângulos, de forma que cada um dos triângulos tem um cateto coincidente com um dos lados do quadrado. Veja um modelo dessa fazenda.

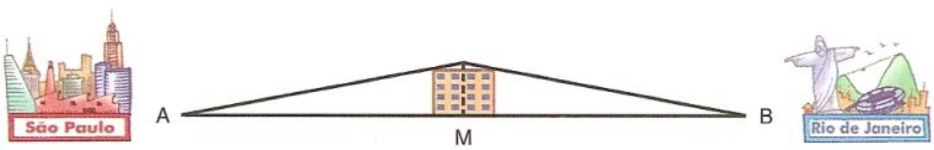


Sabemos que todos os triângulos são diferentes em tamanho, mas com a propriedade de terem seus lados expressos por um número inteiro de quilômetros. Qual o MENOR perímetro possível para essa fazenda?

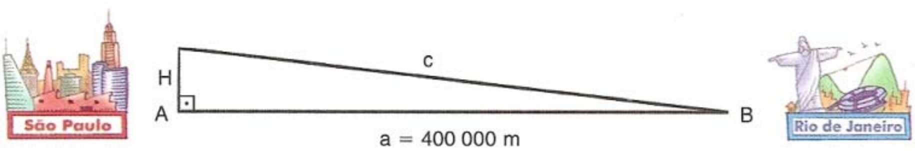
19) ***Quando a intuição falha.***

Tome uma corda esticada, unindo um ponto A de São Paulo a um ponto B do Rio de Janeiro. Suponha que a distância entre estes pontos A e B seja exatamente 400 km. Tome outra corda com um metro a mais que a anterior, ou seja 400001 metros, e fixe também suas extremidades nos pontos A e B. Ela ficará bamba. Levante esta corda pelo seu ponto médio formando um triângulo, conforme a figura. Responda:

a) A altura h deste triângulo será maior ou menor que um metro?

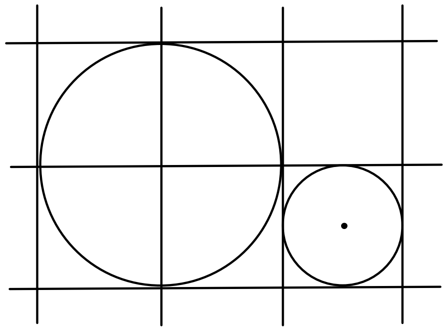


b) Qual é a medida da altura se o triângulo fosse como o da figura a seguir?



20) No triângulo retângulo ABC, $\angle A = 90º$, AB = 5 cm e BC = 9cm. Se I é o incentro de ABC, determine o comprimento do segmento CI.

21) Em uma folha quadriculada em que cada quadrado tem lado 2cm, são desenhados dois círculos como na figura ao lado. A distância mínima entre os dois círculos mede:



a) $3\,cm$

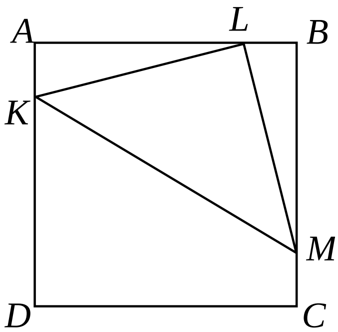
b) $\sqrt{10}\ cm$

c) $\left(\sqrt{10}+3\right)cm$

d) $\left(\sqrt{10}-2\right)cm$

e) $\left(\sqrt{10}-3\right)cm$

22) Na figura a seguir, ABCD é um quadrado de lado 4, K pertence ao lado AD, L pertence ao lado AB, M pertence ao lado BC e KLM é um triângulo retângulo isósceles, sendo L o ângulo reto. Então a área do quadrilátero CDKM é igual a



a) 6

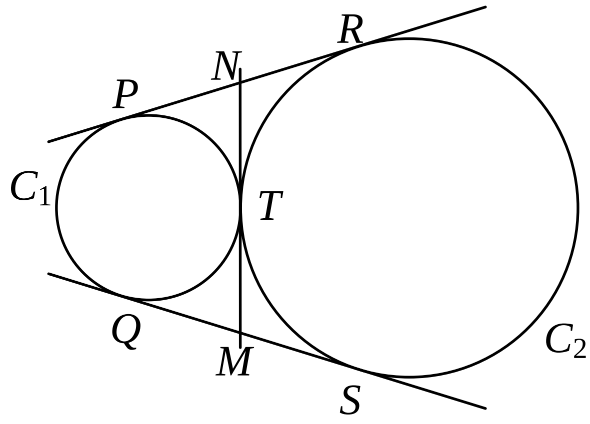
b) 8

c) 10

d) 12

e) 14

23) Os círculos C_1 e C_2, de raios 3 e 4, respectivamente, são tangentes externamente em T. As tangentes externas comuns tocam C_1 em P e Q e C_2 em R e S. A tangente interna comum em T corta as tangentes externas nos pontos M e N, como mostra a figura. A razão entre as áreas dos quadriláteros MNPQ e MNRS é:



a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{9}{16}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{13}{15}$

Bibliografia

ÁVILA, G. **Euclides, Geometria e Fundamentos.** RPM nº 45.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** tradução Elza F. Gomid. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

GIOVANNI, J. R; BONJORNO, J. R. **Matemática Completa.** 2ª ed renovada. Vol. 1. São Paulo: FTD, 2005. Coleção Matemática Completa.

IMENES, L. M; LELIS, M. **Descobrindo o Teorema de Pitágoras.** São Paulo: Scipione, 2000. Coleção Vivendo a Matemática.

LIMA,E. L; CARVALHO, P. C. P; WAGNER, E; MORGADO, A.C. **Temas e Problemas Elementares.** SBM, 2005.

LOOMIS, E. **The Pythagorean Proposition;** Publication of the National Council of Teachers;1968, 2nd printing 1972; currently out of print .

ROSA, Euclides. **Mania de Pitágoras** –RPM nº 02.

SÁ, I. P. **A Magia da Matemática** –Ed. Ciência Moderna, 2007

SPARKES J. C. **The Pythagorean Theorem: Crown Jewel of Mathematics.** 2000, Printed in the United States of America

WAGNER. E. **Construções Geométricas** – Com a colaboração de J. P. Q. Carneiro. SBM, 2005

WAGNER. E. **Teorema de Pitágoras e Áreas.** Apostila da OBMEP.