5o Encontro da RPM

3 a 4 de junho de 2011 – Salvador - BA

Minicurso

Computador na sala de aula: atividades com Geometria Dinâmica

Cristina Cerri

IME – USP

Cada vez mais estamos incorporando o computador e a internet na nossa vida cotidiana. Eles são utilizados por jovens e crianças de forma natural para interagir, formando redes sociais, pesquisar, obter informações, ver vídeos, ouvir música e muito mais. Contudo ainda é tímida a utilização do computador pelo professor como instrumento de ensino e aprendizagem. Atualmente já temos a disposição na *web* uma grande quantidade de sites, animações, vídeos e softwares com objetivos educacionais.

Particularmente a utilização de *softwares* de Geometria Dinâmica (GD) nos permite fazer construções geométricas e modificá-las dinamicamente, mantendo suas relações. Dessa forma pode-se compreender mais facilmente resultados matemáticos e fazer conjecturas.

Há vários bons programas computacionais de Geometria Dinâmica disponíveis: Cabri, Cinderella, GeoGebra, iGeom, etc. O objetivo do minicurso é apresentar algumas atividades com o *software* livre GeoGebra e discutir possíveis utilizações como auxílio no ensino e aprendizagem de tópicos de Matemática, principalmente Geometria.

Nessas notas apresentamos apenas um resumo do que será discutido nos dois encontros do minicurso. Iniciaremos com a apresentação de alguns recursos básicos do GeoGebra, contudo bons manuais para sua utilização podem ser encontrados facilmente na *internet*. Em seguida desenvolveremos atividades de vários tipos que podem ser adaptadas para uso em sala de aula.

O que é o GeoGebra

O GeoGebra é um software livre que reúne Geometria, Álgebra e Cálculo. Foi desenvolvido pelo professor Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburgo, na Áustria, teve sua primeira versão lançada no final de 2001 ([1] e [4]).

O GeoGebra permite construir vários objetos geométricos: pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas, gráficos de funções e curvas parametrizadas, os quais podem depois ser modificados dinamicamente. Equações, expressões de funções e coordenadas podem ser introduzidas diretamente com o teclado. São apresentadas duas janelas de visualização: na janela a direita são mostrados as representações dos objetos geométricos e na da esquerda aparecem as representações algébricas dos objetos. Além disso, é possível obter derivadas e integrais de funções e outros elementos próprios da análise matemática, como raízes ou extremos de uma função.

O *software* pode ser instalado em qualquer computador, com qualquer sistema operacional, a partir do endereço eletrônico http://www.geogebra.org/cms também disponível na versão em português.

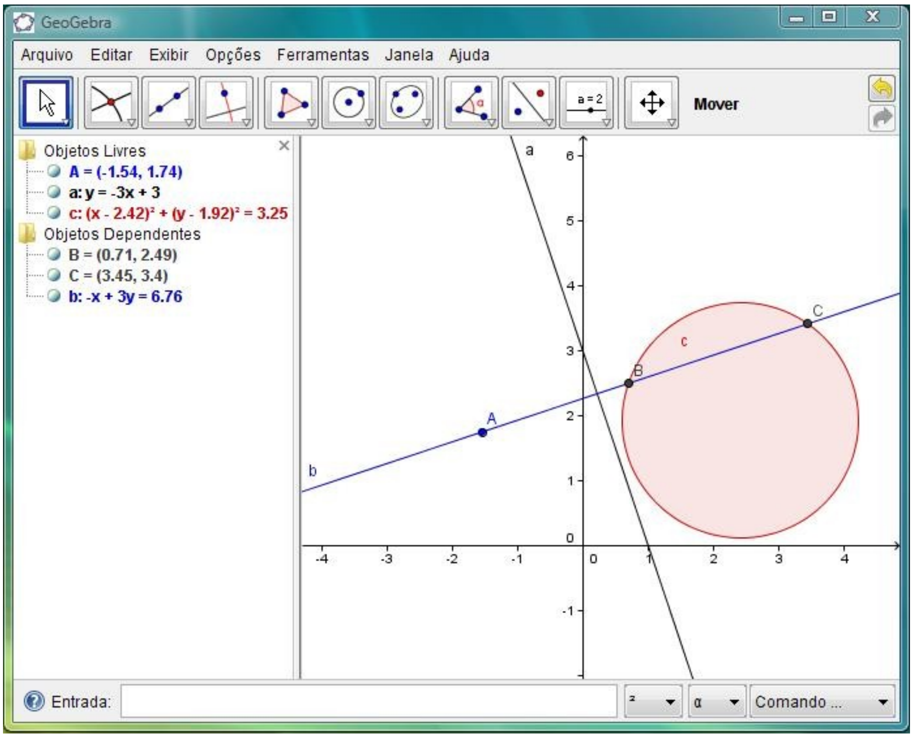

Figura 1 : janela padrão do GeoGebra

O GeoGebra é fácil de usar pois suas funções são bem intuitivas. Certos comandos são os usuais de programas para edição e construção e são ativados com cliques do *mouse*. Há uma barra de botões com ícones que traduzem suas funções. O funcionamento básico consiste em ativar uma função selecionado-a com o *mouse* e clicando.

Na barra de botões temos

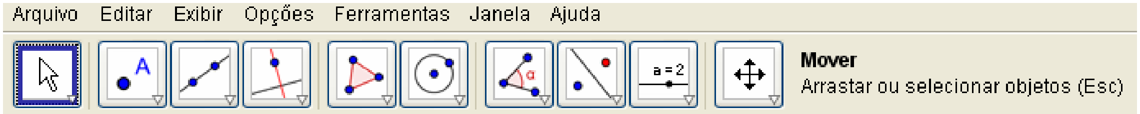

Figura 2 : Barra de botões

Em todos os botões aparece uma seta no canto inferior direito. Esta, ao ser clicada, permite visualizar as opções existentes. Tais funções estão agrupadas por categorias.

Figura 3 : Exemplo de opções numa categoria

Para mover objetos selecione a "seta" no canto esquerdo e o objeto que se deseja movimentar. Somente os objetos livres podem ser movidos.

Os objetos construídos podem ser apagados, escondidos, renomeados ou podem ser exibidos em linhas de cores e formatos diferentes. Para tal deve-se clicar no objeto com o botão direito do *mouse* e selecionar a opção desejada.

Para adquirir familiaridade com as funções e os recursos do GeoGebra vamos realizar algumas atividades elementares. A cada ação observe o efeito na janela de Álgebra.

- Abra uma janela do programa. Na barra de ferramentas selecione **Exibir** e observe que a opção "Eixo" está ativada. Para retirá-los basta desmarcar essa opção. Note que também se pode trabalhar com a janela geométrica quadriculada, selecionando **Malha**.
- Selecione o modo "Ponto" e crie dois pontos *A* e *B*. Selecione o modo "Reta", clique no ponto *A* e no ponto *B*: aparecerá a reta que contém *A* e *B*.
- Clique na reta com o botão direito do *mouse* e renomeie a reta. Depois

esconda o ponto B usando a opção "Exibir".

- Selecione "Círculo" e clique no ponto *A*. Ao mover o *mouse* aparecerá um círculo. Clique no ponto B para criar um círculo que tem centro em *A* e passa por *B*.
- Clique no círculo com o botão direito do *mouse* e na opção "propriedades". Altere cor e estilo do traço.
- Numa nova janela selecione o modo "Polígono" e clique para criar pontos *A*, *B*, *C,* fechando o polígono clicando outra vez em *A*. Na janela algébrica pode-se ver o número correspondente à área do triângulo. Se desejar obter os ângulos internos do triângulo deve-se selecionar o modo "Ângulo" na barra de ferramentas e clicar sobre o triângulo.

Construções com régua e compasso.

O uso de um programa de Geometria Dinâmica possibilita discutir a validação de construções geométricas com régua e compasso. Para ilustrar vamos usar o software para reproduzir algumas construções que fazemos com régua e compasso. Para tal vamos esconder os eixos coordenados.

Atividade 1 : Construção de mediatriz de um segmento com régua e compasso.

a) Dê a definição de mediatriz de um segmento. Como construir com régua e compasso a mediatriz de um segmento?

b) Na janela do GeoGebra crie dois pontos quaisquer *A* e *B*. Crie o segmento que liga esses dois pontos. Usando a correspondente opção no GeoGebra, trace a circunferência de centro *A* e raio *B* e depois a circunferência de centro *B* e raio *A*. Marque os pontos de intersecção desas duas circunferências e crie a reta que passa por eles.

c) Selecione e movimente os objetos livres (pontos *A* e *B* e o segmento $\overline{AB}$). Observe a janela geométrica e a janela algébrica. Essa construção nos forneceu a mediatriz de um segmento? Por quê?

d) Depois das observações, prove que com essa construção se obtêm de fato a mediatriz de um segmento qualquer $\overline{AB}$.

Atividade 2 : Construção da bissetriz de um ângulo com régua e compasso.

a) Dê a definição de bissetriz de um ângulo. Como construir com régua e compasso a bissetriz de um ângulo?

b) Na janela do GeoGebra crie pontos *A* semi retas a partir de *A*. Selecione a opção “Ângulo” e as duas semi retas. Aparecerá a medida do ângulo formado por essas semi retas.

c) Trace uma circunferência qualquer de centro em *A*. Determine os pontos *D* e *E*, que correspondem a intersecção dessa circunferência com a semi retas. Trace duas circunferências de centros *D* e *E,* ambas passando por *A*. Determine os pontos de intersecção dessas duas circunferências e a reta determinada por eles.

d) Selecione e movimente os objetos livres. Observe a janela geométrica e a janela algébrica. Essa construção nos forneceu a bissetriz de um ângulo? Por quê?

e) Depois das observações, prove que com essa construção se obtêm de fato a bissetriz de um ângulo qualquer.

Explorando resultados da Geometria

O uso de *softwares* de Geometria Dinâmica possibilita trabalhar temas de geometria plana de forma mais atraente, mas principalmente permite discutir a diferença entre a geometria dedutiva e a indutiva, enfatizando a necessidade e importância do formalismo matemático. Essa ferramenta permite que o professor discuta conjecturas e a validade de argumentos.

Por exemplo, várias interessantes atividades podem ser feitas para introduzir e discutir casos de congruência e semelhança de triângulos. O estudo dos pontos notáveis de um triângulo, das cônicas e suas propriedades também fica bem mais interessante utilizando um programa de GD.

O GeoGebra possui a opção de criar ponto médio de um segmento, mediatriz de um segmento e a bissetriz de um ângulo não sendo necessário repetir essas construções. Usaremos essas opções para facilitar as construções.

Atividade 3.

a) Na janela do GeoGebra e com a opção “Polígono” desenhe um triângulo qualquer ΔABC. Usando a opção correspondente crie os pontos médios M_1, M_2 *e* M_3 dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, respectivamente.

b) Crie o triângulo $\triangle M_1M_2M_3$. Selecione e movimente os objetos livres. O que se percebe? Faça conjecturas relacionando os triângulos. (Em sala de aula o professor deve estimular os alunos a procurar relações.)

c) Mostre que $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ *e* $\overline{M_2M_3}$ são paralelos, respectivamente a $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$, e que a medida de cada um é a metade da medida do lado paralelo correspondente (para isso utiliza-se casos de semelhança de triângulos, dentre outros resultados).

Atividade 4. Recorde as definições de baricentro, circuncentro, incentro e ortocentro.

a) Construa um triângulo qualquer. Nele construa o baricentro, o circuncentro, o incentro e o ortocentro. Esconda todos os elementos de construção, deixando apenas os pontos notáveis visíveis. Renomeie os pontos: baricentro (*G*), circuncentro (*H*), incentro (*I*) e ortocentro (*O*).

b) Crie a reta que passa por *G* e *H*. Mova um dos vértices do triângulo. O que você observa?

c) Muitas questões e conjecturas podem surgir. O professor deve conduzir as atividades de maneira a proporcionar a discussão da colinearidade dos pontos notáveis *G*, *H* e *O*. Assim terá motivado os alunos para a formalização desse resultado.

Atividade 5. Adaptado de [3].

a) Crie uma circunferência de centro *A* passando por *B*. Renomeie o centro para *O*. Crie pontos *A* e *C* na circunferência e construa o triângulo *ABC*.

b) Construa o baricentro *G* do triângulo *ABC* (use a opção “Ponto médio).

c) Clique no ponto *G* com o botão direito no *mouse* e selecione “Habilitar rastro”.

d) Selecione e mova o ponto *A* sobre a circunferência e observe. Qual o lugar geométrico determinado pelos baricentros dos triângulos?

e) Será que isso ocorre para qualquer triângulo? Desabilite a função “Habilitar rastro” para o ponto *G*. Usando a opção “Lugar Geométrico” selecione os pontos *G* e *A*. Mova o ponto *A* (sobre a circunferência) e o ponto *B* cria-se outros triângulos. O que se observa?

f) Deve-se obter uma circunferência que contem *G*. É interessante mudar sua cor para destacá-la. Para determinar o centro *P* dessa circunferência tome dois outros pontos e trace as mediatriz dos segmentos formados por esses três pontos.

g) Na janela “Entrada” digite: *razão=distância[O,A]/distância[P,G]*. Na janela algébrica veja o resultado. Novamente selecione e mova o ponto *A* e observe.

h) Marque o ponto médio *M* de *BC*. Trace a reta que passa por *M* e *O*. Novamente selecione e mova o ponto *A.* O que se observa? (Em sala de aula o professor deve conduzir as atividades de maneira a proporcionar a formulação de questões e a necessidade de formalização.)

Explorando a Parábola

As cônicas são curvas especiais obtidas pelo corte do cone por um plano. Estamos falando das elipse, hipérbole e parábola. Tais curvas planas são também definidas como lugar geométrico dos pontos que satisfazem determinadas propriedades envolvendo distâncias. Suas propriedades são muito interessantes e úteis, e por isso elas aparecem em arquitetura e na construção de vários instrumentos e objetos que usamos.

Em particular parábolas aparecem em antenas, espelhos, luminárias e vários projetos arquitetônicos. Trajetórias parabólicas também ocorrem em fenômenos da natureza. Em sala de aula o tema pode ser explorado em diversos contextos.

No ensino básico a curva aparece também como gráfico das funções polinomiais quadráticas. É muito comum não se fazer a relação entre esses dois enfoques, nem se explorar as diversas construções dessa curva.

Recordemos a definição mais usual de parábola: *Dados uma reta d e um ponto F a <u>parábola de foco F e reta diretriz d</u> é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de F e d.*

Atividade 6. Vamos fazer uma construção da parábola.

a) Crie um ponto *F* e uma reta *d*. Crie um ponto *A* em *d*. Construa a mediatriz *s* do segmento $\overline{FA}$. Construa a perpendicular *r* a reta *d*, passando por *A*. Determine o ponto *P*, a intersecção de *r* e *s*.

b) Selecione o ponto *P* e habilite a função rastro. Selecione o mova o ponto *A* sobre a reta d. Prove que, de fato, *P* pertence a parábola de foco *F* e diretriz *d*.

c) Use a função "Desfazer" em **Editar** para apagar o rastro. Selecione a *s* e habilite a função "rastro". Mova o ponto *A* sobre a reta *d* e observe. Pode-se provar que *s* é de fato reta tangente a parábola.

Atividade 7. Vamos construir o gráfico da função polinomial do segundo grau. f(x) = ax^2+bx+c. Lembre que qualquer expressão do tipo ax^2+bx+c pode ser escrita na forma $a(x-m)^2$+n. Vamos construir gráficos que dependem de parâmetros.

a) Na janela "Entrada" digite: a=1/4 e dê "*Enter*". Repita o processo para m=0 e n=0.

b) Na janela "Entrada" digite: f(x) = a*(x-m)^2+n. Aparecerá o gráfico de f(x). Observe a janela algébrica. .

c) Na janela algébrica clique em a, m e n para que apareçam na janela geométrica. Selecione e altere primeiramente "a" e verifique o efeito. Faça o mesmo para "m" e "n". Compare o que se tem nas janelas algébrica e geométrica.

d) Trace as retas *d* e *t* de equações "y=-1/(4a)+n" e "x=m", digitando na "Entrada" essas expressões. Obtenha o ponto *P* intersecção da parábola com a reta *t*. Obtenha em *t* o ponto *F* cuja distância a *P* é igual a distância de *P* a reta *d*.

e) Mova os parâmetros a, m e n novamente. O que representam *d* e *F*?

Essas são algumas ideias de utilização desse *software* para o ensino e aprendizagem de Matemática. Atividades realizadas com o auxílio do computador devem ser preparadas visando elaborar conjecturas ou apresentar soluções. Motiva-se assim a discussão e o aprofundamento do conteúdo. A utilização desses recursos deve estar aliada ao conhecimento matemático sistematizado a fim de contribuir no processo de ensino e aprendizagem.

Referências

[1] http://www.geogebra.org/cms

[2] Araujo, L.C.L. de, *GeoGebra, um bom software livre*, Revista do Professor de Matemática-RPM, nº 67, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática-SBM, 2008.

[3] Carneiro, J.P., *Pesquisa de lugares geométricos com o auxílio da Geometria Dinâmica,* Revista do Professor de Matemática-RPM, nº 61, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática-SBM, 2006.

[4] Hohenwarter, M., *GeoGebra - ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene. 2002*. Master thesis. 288p. University of Salzburg, Austria.

[5] Souza, J.C. de, Cardoso, A., *Estudo das cônicas com Geometria Dinâmica*, Revista do Professor de Matemática-RPM, nº 68, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática-SBM, 2009.

[6] Wagner, E., *Construções Geométricas,* Rio de Janeiro: IMPA, 1993.