Aspectos da Indução, nas Ciências e na Matemática

Graça Luzia Dominguez Santos
Departamento de Matemática
Universidade Federal da Bahia

Resumo

A Indução em Ciências é conhecida como sendo um processo de se descobrir e justificar leis universais ou gerais a partir da observação e combinação de casos singulares e a Indução Matemática como um método dedutivo para demonstração de fatos sobre números naturais. Neste minicurso, apresentamos um breve histórico da evolução do conceito de indução, uma exposição da indução matemática a partir dos axiomas de Peano, analisamos qual a relação entre esses dois conceitos e faremos algumas reflexões sobre o ensino da Indução Matemática nos cursos de graduação em Matemática.

Indução

A Indução em Ciências é conhecida como sendo um processo de se descobrir e justificar leis universais ou gerais a partir da observação e combinação de casos singulares.

O conceito de Indução surgiu na Grécia com Aristóteles (384 – 322 a.C). Aristóteles em oposição aos sofistas estabeleceu a regra do silogismo, que consiste em uma argumentação lógica dedutiva de se obter verdades particulares a partir de verdades universais. Como o conhecido silogismo:

Todos os homens são mortais.
Sócrates é homem.
Sócrates é mortal.

Para resolver a questão de certa forma inversa ao silogismo, isto é, como se obter verdade universal a partir do particular, Aristóteles apresenta a indução, chamada de indução enumerativa, que estabelece uma verdade universal baseada na observação e enumeração de casos particulares semelhantes.

A indução apresentada por Aristóteles não teve ressonância na cultura grega que valorizava o rigor lógico.

A indução surge novamente no início do século XVII durante a Revolução Científica com Francis Bacon (1561- 1627) que rejeita a indução de Aristóteles e expõe o seu método de “indução legítima e verdadeira” baseada nas famosas tábuas de presença (registro de ocorrência do evento em estudo), ausência (registro de não ocorrência do evento estudado) e graduação registro das variações graduais de ocorrências do evento). Essas tábuas deixam evidente que Bacon era empirista.

Para Bacon a indução é um método de descoberta que parte de noções confusas do senso comum para observações de casos particulares e por etapas as eleva até generalizações racionais e bem ordenadas. E que uma indução em que as regularidades são explicitamente observadas e anotadas, e na quais variações apropriadas de experimentos são feitas, serviria não apenas para descobrir, mas também para justificar uma lei hipotética.

As críticas a indução começam com David Hume (1711-1756) que apresenta uma teoria questionando o problema lógico da indução. Hume afirma que uma conclusão indutiva jamais será justificada, usando o argumento da regressão infinita:

> ...*todas as nossas conclusões experimentais decorrem da suposição que o futuro estará em conformidade com o passado. Portanto tentar provar a última suposição, por argumentos prováveis, por argumentos referentes à existência, consiste certamente, em girar num círculo vicioso e dar por admitido o que precisamente se problematiza* (Hume, 1972, p.39).

Ou seja, segundo Hume, não existe argumento racional que justifique que o futuro continuará o mesmo por maior e mais uniforme que seja o número dos experimentos.

Na tentativa de reconstruir a indução. Stuart Mill (1806-1873) na obra A System of Logic, conceitua a indução como “a operação de descoberta e prova de proposições gerais”, acrescentando “a indução é um processo de inferência que vai do conhecido para o desconhecido”.(MILL, 1879 apud VELOSO, 2004). Apresentando o princípio supremo de indução baseado no pressuposto da regularidade do universo segundo o qual o que ocorreu uma vez voltará a ocorrer novamente desde que sejam mantidas as mesmas condições.

Segundo Mill, esse princípio é obtido por meio de uma lei, que ele entende como uma lei universal, a Lei de Casualidade: “todo evento, ou o começo de todo fenômeno, tem uma causa, um antecedente, sobre a existência do qual ele é invariavelmente e incondicionalmente consequente” (MILL, apud GRÁCIO, p.6).

O método de investigação experimental que Mill propõe para descobrir a causa de um evento ou fenômeno é uma adaptação das tábuas apresentadas por Bacon, a quem Mill considera o “fundador da Filosofia Indutiva”.

No século XIX, assistiu-se à consolidação do empirismo-indutivismo, onde a prática científica baseava-se na observação dos fenômenos segundo Bacon seguida da aplicação do método indutivo de acordo com a metodologia apresentada por Mill.

Bertand Russel (1872-1970) na tentativa de resolver o problema da justificação na indução, afirmou:

> “ ... a verdadeira questão é esta: um número qualquer de casos em que se cumpriu uma lei no passado proporciona evidência de que se cumprirá no futuro? Em caso negativo, é evidente que não temos base alguma para esperar que o sol nasça amanhã, nem para esperar que o pão que comemos em nossa próxima refeição não nos envenene, nem para nenhuma das expectativas conscientes que regulam a nossa vida cotidiana. Pode-se observar que todas essas expectativas são apenas *prováveis*; assim não devemos procurar uma prova de que elas devem ser cumpridas, mas apenas alguma razão a favor da opinião segundo a qual é *provável* que se cumpram.” (RUSSEL, p.50)

De acordo com sua argumentação ele substitui a justificativa da indução pela justificativa da probabilidade da indução.

Russel propõe o princípio de indução que fundamenta as nossas expectativas acerca da maior ou menor probabilidade da ocorrência de um evento.

> (a) Quanto maior o número de casos nos quais uma coisa do tipo A tem sido encontrada associada com uma coisa do tipo B, o mais provável é (se nenhum caso de falha na associação for conhecido) que A estará sempre associado a B.

> (b) Sob as mesmas circunstâncias, um número suficiente de casos da associação de A com B tornará quase uma certeza que A está sempre associada a B, e fará com que a lei geral se aproxime da certeza sem limites. (RUSSEL, p.52)

E acrescenta:

> Toda a sorte de conhecimento que, tomando a experiência como fundamento, pretende revelar-nos alguma coisa sobre o que não foi experienciado, tem a sua base numa crença. A existência e justificação de crenças, de que o princípio indutivo é um dos exemplos, evoca problemas dos mais difíceis, dos mais debatidos da filosofia. (RUSSEL, p.54).

Com o surgimento no início do século XX da teoria da relatividade, física quântica, geometrias não euclidianas, o grande problema era a demarcação entre ciência e metafísica. Na tentativa de resolver questões “como se faz ciência” e qual a “concepção científica do mundo” surge em 1926 um grupo que ficou conhecido como Círculo de Viena cuja filosofia ficou na história com a denominação de positivismo lógico.

A metodologia apresentada pelo Círculo de Viena para determinar a verdade de uma teoria era baseada na indução, que apesar de não garantir a certeza absoluta, usava o aumento probalitísco da verficação com base empírica para obter a verdade provável. Essa combinação do empirismo com lógica probalística foi defendida por vários cientistas, como Carnap (1891 – 1970) (membro do Círculo de Viena) e Hans Reichenbach (1891-1953) que participava do Grupo de Berlim.

Carnap considerava que hipóteses científicas em geral não podem ser verificadas, mas apenas confirmadas até certo grau, apresentando a formalização da noção probalística de grau de confirmação.

Reichenbach propôs uma lógica indutiva fundamentada na probabilidade de ocorrência dos eventos.

Um dos maiores críticos aos métodos do positivismo lógico foi Karl Popper (1902-1994), principalmente com relação ao método indutivo. Popper era totalmente contra indução:

> Ora, a meu ver não existe a chamada indução. Nestes termos, inferências que levam a teorias, partindo-se de enunciados singulares “verificados por experiência” (não importa o que isto possa significar) são logicamente inadimissíveis. Consequentemente, as teorias nunca são empricamente verificáveis. (POPPER, 1975, pp. 41-42).

Posta a questão da inexequibilidade do indutivismo, Popper apresenta a sua teoria que denomina de falsificacionismo.

Segundo o falsificacionismo uma teoria é considerada científica quando apresenta solidez frente a críticas e refutações. Uma teoria científica é sempre conjectural e não admite o caráter absoluto de verdade, ou seja, é uma verdade provisória. A empíria não é usada para ratificar uma teoria, mas sim para refutá-la ou no máximo confirmá-la.

Nas últimas décadas surgiram tentativas para representação de alguns tipos de argumento indutivo destinadas à formalização de raciocínio sob incerteza, as chamadas abordagens não-monotônicas; que têm recebido críticas de vários autores. (ver GRÁCIO, Sobre a Indução).

Indução Matemática

Princípio de Indução é um dos axiomas de Peano propostos em 1899 em sua obra "*Arithmetic principia novo methodo exposita*" – Novo método de exposição dos princípios da Aritmética. Esses axiomas formalizavam a idéia de que todos os números naturais podem ser obtidos a partir do número 1 pela soma sucessiva da unidade.

O grande mérito de Guissepe Peano (1858-1932) foi a constatação de que a partir de quatro axiomas pode-se conceituar ou deduzir todas as definições e propriedades dos números natuarais, como por exemplo: adição, multiplicação e relação de ordem.

Na realidade, os axiomas conhecidos como axiomas de Peano foram enunciados pela primeira vez por Dedekind, em 1888. Como afirma o próprio Peano nas obras "Arithmetics Principia Nova Methodo Exposita" e "Sul Concetto di Numero".

Apresentamos a sguir uma breve exposição dos axiomas de Peano e do princípio de indução.

Axiomas de Peano

O conjunto dos números naturais é caracterizado pelas seguintes propriedades:

1) Todo número natural possui um único sucessor, que também é um número natural.
2) Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes.
3) Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é chamado de número um e é representado pelo símbolo 1.
4) Se um conjunto de números natuaris contém o número 1, e, além disso, contém o sucessor de cada um dos seus elementos, então esse conjunto coincide com N.

Em linguagem matemática escrevemos:

1) Existe uma função $s : N \rightarrow N$, que associa a cada n $\in$ *N* um elemento *s*(*n*) $\in$ *N,* chamado de sucessor de *n*.
2) A função $s : N \rightarrow N$ é injetiva.
3) Existe um único elemento 1 no conjunto N, tal que 1 ≠ s(n) para todo n $\in$ *N*.
4) Se um subconjunto $X \subset N$ é tal que $1 \in N$ e $s(X) \subset X$, então $X = N$.

O sucessor de 1 chama-se dois(2), isto é, s(1) = 2; o sucessor de 2 chama-se três e assim sucessivamente. Indicaremos s(n) por n + 1.

O quarto axioma é chamado de axioma de indução e do ponto de vista estritamente matemático pode ser reformulado por: Um subconjunto de *X* de N chama-se *indutivo* quando $s(X) \subset X$, isto é, quando o sucessor de qualquer elemento de *X* também pertence a *X.* Com essa definição, o axioma de indução afirma que o único subconjunto indutivo de N que contém o número 1 é o próprio N.

O axioma de indução tem um papel de fundamental não só na teoria dos números naturais como em toda matemática, pois pode ser visto como um método de demonstração, chamado de *Princípio* de *Indução Matemática ou Princípio de Indução Finita*.

Princípio de Indução Matemática

Seja P uma propriedade referente aos números naturais. Se 1 goza da propriedade P e se, além disso, o fato de o número natural n gozar a propriedade P implica que seu sucessor $n+1$ *também goza, então todos os números naturais gozam da propriedade P*.

Assumindo os axiomas de Peano, podemos mostrar que o Princípio de Indução Matemática é verdadeiro.

De fato, seja $X = \{n \in N; P(n)\ \acute{e}\ verdeira\}$, note que $1 \in X$ e *X* é indutivo. Logo, $X = N$, isto é, P é verdadeira para todos os números naturais.

Usando o Princípio de Indução podemos mostrar, por exemplo, que a soma dos *n* primeiros naturais ímpares é igual a n^2, ou seja, $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$, para todo numeral natural *n*.

1) Para n =1 a afirmação é verdadeira.
2) Se para um dado n tem-se $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ então

$$1+3+5+...+(2n+1)=\big((1+3+5+...+(2n-1)\big)+(2n+1)=n^2+(2n+1)=(n+1)^2.$$

Logo, pelo Princípio de indução, a afirmação é verdadeira para todo número natural.

Segundo José Morgado (MORGADO, 1990), em palestra realiza em 13/03/1990, o método de demonstração por indução é uma criação de muitos matemáticos. Entre quais ele cita, Francesco Maurolico (1494-1575) e Blaise Pascal (1632-1662) no “Traité du triangle arithmetique”. O nome “indução matemática” é bem mais recente, parece ser devido a August de Morgan em 1838.

Algumas reflexões sobre Indução Matemática

Sendo a Indução Matemática um método dedutivo, por que o nome indução? Segundo George Polya, no livro traduzido para português com o título *A arte de* *resolver Problemas*, “É de lamentar que estes nomes (indução e indução matemática) estejam relacionados, pois há muita pouca conexão lógica entre os dois processos. Há, no entanto, alguma conexão prática, pois muitas vezes utilizamos os dois métodos conjuntamente.” (POLYA, p.91).

De fato, de que forma obtivemos a relação “a soma dos *n* primeiros naturais ímpares é igual a n^2”? Provavelmente, foram as observações:

$$1 = 1^2,\ 1 + 3 = 2^2,\ 1 + 3 + 5 = 3^2,\ 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2,\ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2 \ldots$$

que conduziram os matemáticos a formularem a conjectura

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2, \forall n \in N$$

Essa fase experimental da matemática é muito parecida com o ocorre nas chamadas ciências naturais. No entanto, em matemática a observação de alguns casos permite sugerir que a afirmação é verdadeira, mas não provar sua verdade. Esse resultado, como vimos anteriormente, pode ser demonstrado usando indução matemática.

Existem muitos exemplos em matemática de conjecturas que foram formuladas a partir da verificação da validade de vários exemplos e que posteriormente foram refutadas. Um caso bastante conhecido é o trinômio de Euler (1707-1783): No trinômio $x^2 + x + 41$, quando substituímos x por um número natural qualquer sempre obteremos um número primo.

Observe que se n = 1, $1^2 +1 + 41 = 43$ é primo, n = 2, $2^2 + 2 + 41= 47$ é primo ... até n = 39 a afirmação é verdadeira. No entanto, para n = 40 temos $40^2 + 40 + 41 = 41^2$, que evidentemente, não é primo.

Pode-se mostrar que não há nenhum polinômio em *x*,

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0,\quad a_n > 0,$$

que só dê inteiros primos valores inteiros de *x*.

Um outro caso, foi o do matemático francês Pierre Fermat (1601-1665) que por mais de 20 anos esteve convencido que os números inteiros da forma $a_n = 2^{2^n}+1$, para *n* um inteiro não negativo, eram primos. Mas, essa afirmação não é verdadeira.

Em 1743, Euler demonstrou que: se *a* e *b* são números inteiros primos entre si, então para todo inteiro positivo *n* o divisor do número $a^{2^n} + b^{2^n}$ é 2 ou é da forma $2^{n+1}k+1$. E mostrou que o número $2^6 10+1$ = 641 (k = 10) é um divisor do número $a_5 = 2^{2^5} + 1$. De fato, $2^{2^5} + 1 = 641.6700417$.

Esses exemplos e muitos outros, em matemática, confirmam que se podem cometer erros ao formular leis gerais a partir de casos particulares. No entanto, não devemos afirmar que a matemática está desligada da experiência empírico-indutiva. A matemática em construção é semelhante a uma ciência experimental, com uma etapa indutiva que consiste na investigação, na busca de solução para um problema utilizando-se de exemplos para chegar a uma conjectura.

Aplicamos o Princípio de Indução, quando necessitamos, sem questionamentos. Mas a sua prova é obtida a partir da axiomatização dos números naturais por Peano e vários matemáticos renomados, entre eles Kronecker e Poincaré teceram críticas severas aos axiomas de Peano. O ponto central da discussão era que os axiomas de Peano tentavam definir os números naturais através deles, e dessa forma, estavam definindo não apenas um conjunto, mas uma classe de conjuntos com as mesmas propriedades. Para Poincaré não era admissível que um objeto matemático ser apresentado e elucidado por meio de uma classe ao qual próprio objeto pertence.

No artigo Inducción filosófica – Inducción matemática, Clara Sanchez levanta as seguintes questões: Aceitam todos os matemáticos o princípio? E se aceitam quais são suas razões? As quais ela responde citando Epstein:

1. Os plantonistas dizem que este método é válido para os objetos abstratos chamados números naturais. Não é um método de geração, mas simplesmente a estrutura dos números que é invocada, uma estrutura que nossa mente tem para perceber esses objetos.
2. Os institucionistas dizem que a prova é válida devido a nossa intuição transcendental da natureza dos números naturais.
3. O matemático construtivo diz que o método é válido, porque gerar um número ou prova não significa gerá-lo fisicamente, mas gerá-lo na teoria.

4. Os ultraconstrutivistas dizem que o método não é válido. Pois, grandes números como $10^{10^{10}}$, não podem ser gerados a partir de 1 adicionando 1, com uma série de provas com Modus Ponens. Efetivamente temos que, se a afirmação é verdadeira para $10^{10^{10}}$, é verdadeira para $10^{10^{10}}$ + 1, por Modus Ponens. No entanto, não há nenhuma razão para aceitar que vale para $10^{10^{10}}$, pois $10^{10^{10}}$ atua como uma notação para o infinito. (EPSTEIN apud SANCHEZ, p. 203-204)

Assim, como diz Epstein, “dependendo da filosofia a que atribui, a indução em matemática é um prova ou exatamente o que seu nome sugere: uma generalização de casos”. (EPSTEIN apud SANCHEZ, p. 203-204).

Considerações finais

A indução Matemática é estudada nos primeiros semestres dos cursos de Graduação em Matemática. E geralmente, é ensinada como uma receita a ser seguida, como um conjunto de técnicas de demonstração algébrica de resultados sobre os números naturais. A etapa de investigação e descoberta é, quase sempre, omitida. Dessa forma, o “ensinar matemática” não tem nenhuma semelhança com o “fazer matemática”.

Claro, que no ensino de matemática não podemos deixar de enfatizar a componente algorítmica que só pode ser adquirida por meio de treino sistemático, mas não devemos esquecer que “fazer matemática”, entre outras habilidades, inclui combinar observações, fazer analogias e inferências, e formular conjecturas.

A aplicação do princípio de indução sem questionamentos decorre da concepção, da grande maioria dos professores, da matemática como uma ciência infalível, imutável, em que as verdades são absolutas e independentes do contexto histórico.

Referências

CHALMERS, A.F.. *O que é Ciência Afinal?* 2.ed. Editora Brasiliense, 1993.

DIAS, A.; SILVA, A.P, *O Indutivismo no ensino de Ciências e a Inconsistência do argumento indutivista*. VII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências. 2009.

EPSTEIN, Richard L, *Five ways of saying "therefore".* Wadsworth, 2002.

FREITAS, A.C. *A formação de professores de matemática e suas implicações.* Disponível em <www.sbemba.com.br/anais_do_forum/Comu.../CC14.pdf>.Acesso em 14/05/2011.

GAMA, L.; ZANETIC, J. *Reflexões epistemológicas para o ensino de ciências: questões problematizadoras.*VII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências.2009.

Disponível em <www.fae.ufmg.br/abrapec/viempec/7enpec/pdfs/776.pdf>. Acesso em 02/2011.

GRÁCIO, M^{a} C. C. *Sobre a Indução*. Disponível em <ftp://ftp.cle.unicamp.br/pub/arquivos/educacional/ArtGT4.pdf>. Acesso em 14/05/2011.

HUME, D. Investigação acerca do entendimento humano. São Paulo: Ed. Nacional, Ed. USP, 1972.

MORGADO, J. *Indução e Indução Matemática* – Boletim da SPM – n^{0} 17, junho de 1990 – palestra feita em 13/03/1990, na Escola Superior de Viana de Castelo. Disponível em < nautilus.fis.uc.pt/b**spm**/art-get.php?oid=376502>. Acesso em 14/05/2011.

POLYA, G. A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro, Interciência, 1975.

POPPER, Karl. A *Lógica da pesquisa científica*. Tradução de Leônidas Hegenberg e Octanny Silveira da Mota. São Paulo: Cultrix, 1975.

RUSSEL, B. *Os problemas da filosofia*. Trad. Jaimir Conte. Florianópolis: 2005, cap. 6. Disponível em <http://www.cfh.ufsc.br/~conte/russell.html>. Acesso em 14-05-2011.

SÁNCHEZ, Clara Helena H. Inducción filosófica-inducción matemática, Memória XII Encuentro de Geometría y I de Aritmética – Disponível em

<www.usa.edu.co/**matematicas**/.../ **Inducción**%20**Matemática**%20y%20**Filosófica**.pdf>. Acesso em 15/05/2011.

SAVIOLI, A. M. P. *Uma reflexão sobre a Indução Finita*: relato de experiência. Disponível em <www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/.../1083>. Acesso em 14/05/2011.

VELOSO, A.J.B, *Acerca da Indução*, 2004 - Disponível em <cfcul.fc.ul.pt/equipa/2_cfcul_nao.../acercadainducao.doc>. Acesso em 14/05/2011.