<u>*MINICURSO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA NO DIA A DIA*</u>

<u>PORCENTAGEM</u>

Quando é dito que 40% das pessoas entrevistadas votaram no candidato “A”, esta sendo afirmado que, em média, de cada 100 pessoas, 40 votaram no candidato “A”. Se existirem 200 pessoas, 80 votaram no candidato “A”, e assim sucessivamente.

Do ponto de vista matemático:

Conceito: A expressão $a\%$ (lê-se: a por cento) é o mesmo que $\frac{a}{100}$.

EXEMPLOS:

a) 3% = $\frac{3}{100} = 0{,}03$ b) 50% = $\frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ (metade) c) 100% = $\frac{100}{100}$ = 1 (um inteiro, o “todo”)

Observação: Considerando o item a), acima, a taxa de 3% = $\frac{3}{100}$ é dita taxa percentual ou porcentual e a mesma taxa, 0,03, é chamada de taxa unitária.

<u>IMPORTANTE:</u> Em geral os problemas de porcentagem podem ser resolvidos através de uma regra de três simples direta.

<u>EXEMPLOS:</u>

i) Determine 4% de 500.

1ª SOLUÇÃO:

Consideramos que 500 é o “todo”, isto é, 100%:

500 ....100%
X ....4% ⟶ $X = \frac{4x500}{100} = 20$

2ª SOLUÇÃO:

<u>Muitas vezes, em matemática, a preposição “de” significa multiplicação</u>, portanto:

4% de 500 é o mesmo que: **4% . 500 =** $\frac{4}{100}.500 = 20$

ii) Quantos por cento 12 representa de 480?

480 .... 100%
12 .... *X* ⟶ $X = \frac{12x100\%}{480} = \frac{1200\%}{480} = 2{,}5\%$

Logo 12 equivale a 2,5% de 480.

JUROS SIMPLES E COMPOSTOS

Neste texto, reunimos os elementos presentes na maioria dos contextos onde a Matemática Financeira se aplica. Tópicos como: as terminologias usadas em investimentos, a diferença básica entre os regimes de juros simples e compostos, as notações usadas para prazos e taxas percentuais e ainda o conceito de diagramas de fluxos de caixa. A importância dos mesmos dispensa justificativa, visto que será demonstrada mais adiante, a partir de seus empregos em situações diversas.

NOÇÕES BÁSICAS

Como em todos os ramos do conhecimento humano, em Matemática Financeira existem noções que são consideradas básicas, por estarem presentes na maioria das situações nas quais a mesma se aplica. Vamos apresentá-las através da seguinte ilustração: Um investimento de R$ 100,00 retornou R$ 140,00 ao seu investidor. Assim, temos que:

O valor principal ou simplesmente principal (ou capital, ou ainda, capital inicial) é o dinheiro que possibilitou a transação financeira, que é de R$ 100,00.

O montante ou valor futuro é o valor de resgate do investimento, que vale R$ 140,00 (capital mais juros).

Os juros ou rendimento é a diferença entre o que a pessoa recebeu (montante) e o que a mesma aplicou (principal), em valores monetários. No exemplo, é de R$ 40,00.

A taxa de juros é a divisão entre os juros recebidos e o capital ou principal.

$$\text{taxa de juros} = \frac{juros}{capital} = \frac{40}{100} = 40\% = 0,4$$

JUROS SIMPLES X JUROS COMPOSTOS

Um investimento de R$ 100,00 é feito segundo uma taxa de juros de 10% ao mês. Conforme os regimes a serem adotados, teremos os seguintes montantes ao longo dos meses:

regime	mês 1	mês 2	mês 3	mês 4
simples	110,00	120,00	130,00	140,00
composto	100,00	121,00	133,10	146,41

Observe que, no regime de juros simples, a taxa de juros incidirá sempre sobre o valor principal. Sendo assim, os juros simples **em todos os meses** serão iguais a 10% de R$ 100,00, isto é, R$ 10,00. Por outro lado, no regime de juros compostos, a taxa de juros incidirá sempre sobre o montante do mês anterior. Noutras palavras, a taxa de juros compostos leva em conta o capital acumulado. Portanto, no caso de juros compostos, no primeiro mês, temos que os juros serão de 10% de R$ 100,00, o que equivalem a R$ 10,00. Com isso, o montante fica em R$ 110,00. Já no mês seguinte, os juros serão calculados como 10% de R$ 110,00, o que resulta em R$ 11,00. Assim, o montante será R$ 121,00. Para os meses seguintes, utiliza-se o mesmo princípio de cálculo. Colocando isso de uma forma mais clara:

Juros simples:
Mês n (qualquer mês): 10% de R$ 100 = R$ 10,00

Juros compostos:
Mês 1: 10% de R$ 100 = R$ 10,00
Mês 2: 10% de R$ 110 = R$ 11,00
Mês 3: 10% de R$ 121 = R$ 12,10
Mês 4: 10% de R$ 133,10 = R$ 13,31

A maior facilidade do uso do regime de capitalização simples é a de que os juros são calculados uma única vez, enquanto que no regime de capitalização composta em cada período teremos juros diferentes. Com isso, **uma taxa simples** de 10% ao mês equivale a uma taxa simples de 20% ao bimestre, 30% ao trimestre, etc. Por outro lado, uma taxa composta de 10% ao mês equivale a uma taxa composta de 21% ao bimestre, 33,10% ao trimestre (conforme tabela acima).

Logo, converter taxas simples é um processo que envolve apenas multiplicação, enquanto que taxas compostas envolvem outras operações a serem estudadas mais adiante (potenciação ou radiciação)

Os juros simples são largamente usados em países em que a inflação é muito baixa, ou em contextos em que as taxas de juros anuais são muito pequenas, pois nestes casos, a perda ao longo dos tempos é relativamente insignificante.
No Brasil, os bancos calculam os juros simples em excessos em conta corrente (cheque especial).

De um modo geral, o regime de juros compostos é o mais utilizado.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA)

Uma PA é uma seqüência de números que satisfaz a seguinte propriedade:
A **diferença entre um termo e o anterior**, a partir do segundo, **é uma constante denominada razão (r) da PA**.
Veja os exemplos a seguir:

a) (1, 2, 3, 4, 5, 6) é uma PA de razão r = 1; chamada PA crescente, pois r > 0.
b) (3, 7, 11, 15, 19, 23, ...) é uma PA infinita de razão r = 4;

Representação clássica de uma PA finita (de n termos):
(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n), onde a_1 é o 1^o termo, a_2 é o 2^o termo, ..., e a_n é o enésimo termo ou termo geral da seqüência.

Note que a PA acima, de razão r, pode ser escrita (observe as expressões em negrito, a partir do terceiro termo e os respectivos índices $a_3, a_4, a_5 \ldots a_n$):

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 ... a_n

(a_1, a_1 + r, a_1 + **2**r, a_1 + **3**r, a_1 + **4**r, ..., a_1 + **(n – 1)**.r)

Observe que,no caso de juros simples, os juros acumulados em cada período constituem uma PA cujo primeiro termo é Ci e a razão também é C.i, pode escrever (observe as expressões em negrito, a partir do terceiro termo):

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 ... a_n

(Ci, 2Ci, 3Ci, 4Ci, 5Ci, ..., Ci + **(n – 1)**. Ci = Cin)

<u>Generalizando:</u>

i) **J = C.i.n**, onde **J** representa os juros, **C** o capital, **i** a taxa e **n** o tempo (sempre expresso na mesma unidade da taxa).

ii) **M = C + J**, onde M é o montante. Note que **M = C + C.i.n**, ou ainda, **M = C (1 + i.n)**

<u>JUROS DE MORA + MULTA</u>

Para calcularmos os juros de mora, precisamos do conceito de taxas proporcionais, para tanto veremos exemplos simples:

a) A taxa de 18% ao mês (o mês, a priori, tem 30 dias) é proporcional a:

i) 36% ao bimestre (pois 2.18% = 36%)

ii) $\frac{18}{30}\%\ ao\ dia = 0,6\%\ ao\ dia$

iii) $17.\frac{18}{30}\%\ em\, 17\ dias = 10,2\%\ em\, 17\ dias$

Resolveremos alguns problemas de atraso no pagamento de contas de consumo:

1) A conta de telefone de Magno, no valor de R$ 240,00 foi paga com atraso de 9 dias. Calcule o valor pago, devido ao atraso.

Multa (de 2%, independente do número de dias): $\frac{2}{100}.240 = 4,80$

Juros de mora (1% ao mês): $\frac{1\%}{30}.9.240 = \frac{0,01}{30}.9.240 = 0,72$ (ou, se você preferir: Se o atraso fosse de um dia, o juros seria de $240.\frac{0,01}{30} = 0,08$, como são 9 dias: $9.0,08 = 0,72$).
Valor pago: 240 + 4,80 + 0,72 = 245,52 reais

2) A conta de água de José, no valor de R$ 150,00 foi paga com atraso de 12 dias. Calcule o valor pago, devido ao atraso (resolva...).

i) Multa:
ii) Juros de mora:
iii) Valor pago:
Resposta: i) R$ 3,00; ii) R$ 0,60; iii) R$ 153,60.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 (ATAUALPA MAGNO – 2011) Calcule os juros e os montantes produzidos pelo capital (C), à **taxa _anual_** (i) durante o tempo (n), nos seguintes casos:

a) C = 3.000 reais, i = 12%, n = 2 anos

RESOLUÇÃO: Como a taxa é anual (pelo enunciado do problema) e o tempo também está em anos (2 anos), podemos aplicar diretamente a fórmula: **J = C.i.n** $\rightarrow$ **J =** $3000 \times \frac{12}{100} \times 2$**,** simplificando: **J = 30.12.2 = 720** reais. Para calcular o montante, usamos a fórmula: **M = C + J**, logo: **M = 3000 + 720 = 3.720 reais**.

b) C = 360 reais, i = 10%, n = 8 meses

RESOLUÇÃO: Como a taxa é anual (pelo enunciado do problema) e o tempo está em meses (8 meses), **não** podemos aplicar diretamente a fórmula **J = C.i.n**. Devemos, ou transformar a taxa anual para taxa mensal, ou transformar o tempo, que está em meses para ano. Normalmente preferimos “mexer” no tempo, fazendo uma regra de três:

1 ano 12 meses
x ano 8 meses Logo: x = $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ do ano.

Agora podemos aplicar a fórmula: **J = C . i . n** $\rightarrow$ **J =** $360 \times \frac{10}{100} \times \frac{2}{3}$ **= 12 . 2 = 24 reais**.
Montante: **M = 360 + 24 = 384 reais**.

c) C = 20.000 reais, i = 9%, n = 1 ano, 2 meses e 18 dias

RESOLUÇÃO: Como a taxa é anual (pelo enunciado do problema) e o tempo está em anos, meses e dias (1 ano 2 meses e 18 dias), **não** podemos aplicar diretamente a fórmula **J = C. i . n**. Seguindo o caminho que estabelecemos nos exercícios anteriores “mexeremos” no tempo, transformaremos inicialmente 1 ano 2 meses e 18 dias para dias, isto é 1 ano = 360 dias; 2 meses = 60 dias, teremos, ao todo 360 + 60 + 18 = 438 dias. Armaremos uma regra de três:

1 ano	360 dias	
x ano	438 dias	Assim: $x = \frac{438}{360} = \frac{73}{60}$ do ano

Agora podemos aplicar diretamente a fórmula: **J = C . i . n** $\rightarrow$ **J =** $20000 \times \frac{9}{100} \times \frac{73}{60}$ $\rightarrow$ **J = 2.190 reais**. Montante: **M = 20.000 + 2.190 = 22.190 reais**

R.2 (ATAUALPA MAGNO – 2011) João conseguiu R$ 6.000,00, emprestados à taxa de 18% ao ano. Deverá devolver ao banco o valor de R$ 6.630 reais. Qual foi o prazo que João teve para o empréstimo?

<u>RESOLUÇÃO</u>: Temos: Capital = 6.000; Montante = 6.630; podemos concluir que os juros foram de 6.630 – 6000 = 630. Usando a fórmula **J = C .i .n,** teremos: $630 = 6000.\frac{18}{100}.\, n \rightarrow n = \frac{630}{1080} = \frac{63}{108} = \frac{7}{12}$ do ano (pois usamos a taxa **<u>anual</u>** de 18%), raciocinando um pouco ou utilizando uma regra de três, concluímos que **n = 7 meses**.

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG)

Na seqüência (5, 10, 20, 30, 40, 80, 160) podemos notar que **<u>multiplicando</u>** cada termo por 2 obtemos o termo seguinte:
$5 \times 2 = 10$; $10 \times 2 = 20$; $20 \times 2 = 40$; $40 \times 2 = 80$; $80 \times 2 = 160$
Dizemos que essa seqüência é uma ***progressão geométrica (PG)***.

DEFINIÇÃO: Chamamos progressão geométrica (PG) a toda seqüência onde multiplicando cada termo por uma mesma constante **q** obtemos o termo seguinte. Esta constante **q** é denominada **razão** da PG.
A PG (5, 10, 20, 30, 40, 80, 160) tem razão q = 2.

IMPORTANTE: O **quociente entre um termo e o anterior**, a partir do segundo, **é própria razão (q = 2) da PG**.

Veja outros exemplos:

a) (1, 2, 4, 8, 16) é uma PG crescente de razão q = 2;
b) (-1, -1/2, -1/4, -1/8, ...) é uma PG crescente de razão q = 1/2;

Note que uma PG finita é uma seqüência da forma:

$$\left(\underset{a_1}{\underset{\uparrow}{a_1}},\ \underset{a_2}{\underset{\uparrow}{a_1.q}},\ \underset{a_3}{\underset{\uparrow}{a_1.q^2}},\ \underset{a_4}{\underset{\uparrow}{a_1.q^3}},\ \underset{a_5}{\underset{\uparrow}{a_1.q^4}},\ \ldots,\ \underset{a_n}{\underset{\uparrow}{a_1.q^{n-1}}} \right)$$

SOMA DOS TERMOS DE UMA PG FINITA

A soma dos termos de uma PG finita, a partir do primeiro, é definida por:

$S_n = a_1 + a_1\ q + \ldots + a_1\ q^{n-1}$ (note que, na última parcela, usamos $a_n = a_1.q^{n-1}$)

Mostraremos que:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Vamos lá, escreva:

$$S_n = a_1 + a_1\ q + \ldots + a_1\ q^{n-1}$$

Multiplique pela razão (q):

$$q\ S_n = a_1\ q + a_1\ q^2 + \ldots + a_1\ q^n$$

Subtraia a primeira soma da segunda, cancelando os termos repetidos:

$$q\ S_n - S_n = a_1\ q^n - a_1$$

Que é equivalente a:

$$(q-1)\, S_n = a_1\, (q^n - 1)$$

Divida ambos os termos por: $q - 1 \neq 0$ e o resultado é: ***S*** $S_n = \frac{a_1 \times (q^n - 1)}{q - 1}$

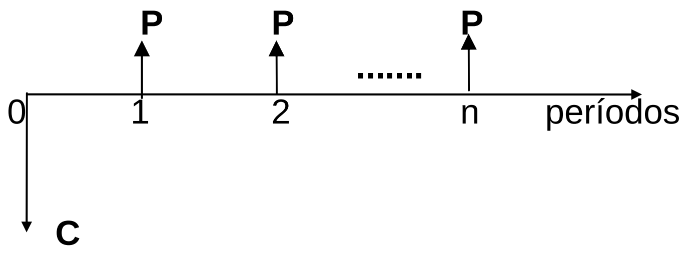
FÓRMULAS IMPORTANTES:

- $a_n = a_1.q^{n-1}$ **(Fórmula do termo geral de uma PG);**
- **S_n =** $\frac{a_1 \times (q^n - 1)}{q - 1}$ **para q ≠ 1 (Fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma PG; onde *n* é o número de termos que se deseja somar).**

Precisaremos do conceito de rendas uniformes (prestações constantes e prazos entre as prestações igualmente espaçados) para usar posteriormente no Sistema de Amortização Francês

RENDAS UNIFORMES

Valor Presente (ou Financiado), designado por C ou PV, de Rendas Uniformes Postecipadas (o valor presente "cai" 1 período antes da 1ª prestação (P)):



Poderíamos obter o valor presente **C, "descapitalizando"** as prestações, queremos dizer:

C = $\frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+I)^2} + ... + \frac{P}{(1+i)^n}$

Para evitar esse trabalho enfadonho, usamos a soma dos termos de uma Progressão Geométrica, conforme vimos acima: **S_n =** $\frac{a_1 \times (q^n - 1)}{q - 1}$ que nos garante que:

C = **P .** $\frac{(1+\mathrm{i})^n - 1}{\mathrm{i}.(1+\mathrm{i})^n}$, a expressão $\frac{(1+\mathrm{i})^n - 1}{\mathrm{i}.(1+\mathrm{i})^n}$ é abreviada pelo símbolo **. $a_{n\rceil i}$** (lê-se <u>a</u> <u>n</u> cantoneira <u>i</u>).

<u>Assim:</u>

C = P . $a_{n\rceil i}$

Observações:

i) Demonstra-se que $\frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$**, logo: $a_{n\rceil i}$ =** $\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-n}}{\mathrm{i}}$

ii) Atenção: <u>n é o número de prestações.</u>

PLANOS DE AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMOS E FINANCIAMENTOS

Quanto se paga uma dívida em prestações, cada uma delas compreende duas parcelas, uma de juros que recaem sobre o saldo devedor no início de cada período e outra correspondente a amortização (pagamento) do valor presente (capital emprestado ou financiado), assim: **PRESTAÇÃO = AMORTIZAÇÃO + JUROS**

Estudaremos dois Sistemas de Amortização:

1) SISTEMA DE AMORTIZAÇÕES CONSTANTES (SAC)

2) SISTEMA FRANCÊS (SF) = SISTEMA DE PRESTAÇÕES CONSTANTES (SPC)

Para qualquer um desses planos utilizaremos os seguintes dados:

VALOR PRESENTE (V): R$ 10.000,00
NÚMERO DE PRESTAÇÕES ANUAIS (n): 4
TAXA (i): 10% a.a.

1) SISTEMA DE AMORTIZAÇÕES CONSTANTES (SAC):

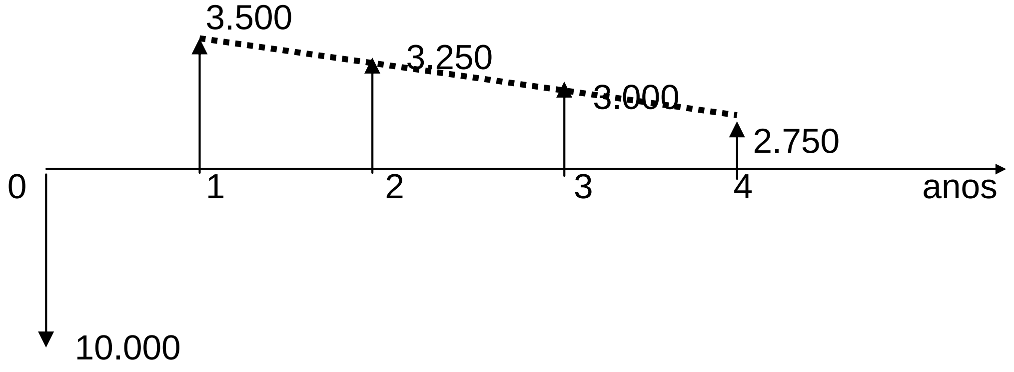
Para esse plano, primeiramente calculamos o valor da amortização:

AMORTIZAÇÃO = $\frac{VALOR\ PRESENTE}{NÚMERO\ DE\ PRESTAÇÕES} = \frac{10.000}{4} = 2.500$.

TABELA DE FINANCIAMENTO:

ANO (t)	PRESTAÇÃO (P_t)	JUROS (J_t)	AMORTIZAÇÃO (A_t)	SALDO DEVEDOR (S_t)
0	-	-	-	10.000,00
1	3.500,00	1.000,00	2.500,00	7.500,00
2	3.250,00	750,00	2.500,00	5.000,00
3	3.000,00	500,00	2.500,00	2.500,00
4	2.750,00	250,00	2.500,00	-

Fluxo de Caixa correspondente às prestações Observe que elas decrescem segundo uma Progressão Aritmética de razão 250,00:



2) SISTEMA FRANCÊS (SF OU SPC) = SISTEMA DE PRESTAÇÕES CONSTANTES:

CARACTERISTICAS:

O primeiro passo é calcular o valor constante das prestações usando a fórmula $C = P.\ a_{n\rceil i}$.

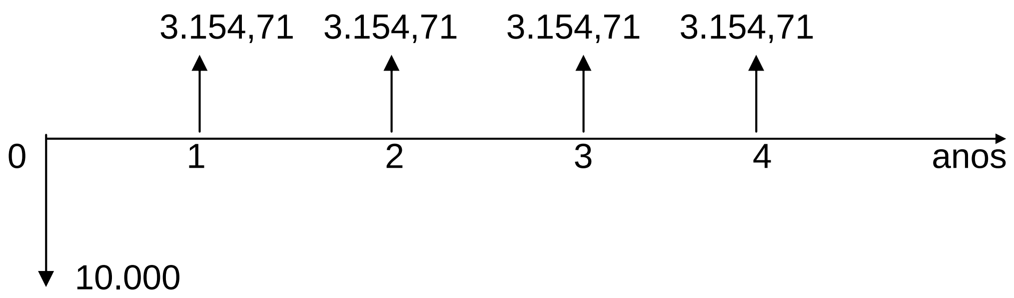
O segundo passo é calcular os juros sobre o saldo devedor remanescente.

O terceiro passo é calcular a amortização lembrando que $A_k = P_k - J_k$

ANO (t)	PRESTAÇÃO (P_t)	JUROS (J_t)	AMORTIZAÇÃO (A_t)	SALDO DEVEDOR (S_t)
0	-	-	-	10.000,00
1	3.154,71	1.000	2.154,71	7.845,29
2	3.154,71	784,53	2.370,18	5.475,11
3	3.154,71	547,51	2.607,20	2.867,91
4	3.154,71	286,79	2.867,91	-

Observe que como os **juros diminuem** a cada ano e a **prestação é constante**, a parcela de **amortização cresce** a cada ano.

Fluxo de caixa:



APLICAÇÃO:

Para os dados a seguir PV = R$ 10.000.000,00 (preço de venda de uma fazenda); i= 12% a.a. e n = 10 (anuais), determine o valor da prestação.

RESOLUÇÃO:

$$P = \frac{10.000.000}{a_{10\rceil 12}} = 1.769.841,64$$

UTILIZE OS SEUS CONHECIMENTOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA PARA RESOLVER OS EXERCÍCIOS ABAIXO:

01) (TCU) - O preço de uma mercadoria é Cr$ 2.400,00 e o comprador tem um mês para efetuar o pagamento. Caso queira pagar à vista, a loja concede um desconto de 20%. O mercado financeiro oferece rendimento de 35% ao mês. Assinale a opção correta.

(A) A melhor opção é o pagamento à vista.
(B) Não há diferença entre as duas modalidades de pagamento.
(C) No pagamento a prazo, o comprador lucra, no fim do mês, Cr$192,00.
(D) No pagamento a prazo, o comprador lucra, no fim do mês, Cr$ 210,00.
(E) No pagamento a prazo, o comprador lucra, no fim do mês, Cr$ 252,00.

02) (Petrobrás) - Suponha a taxa corrente no mercado de 40% ao mês. Considere a alternativa abaixo:

X - Pagamento à vista, com 30% de desconto.
Y - Pagamento integral, um mês após a compra, com desconto.
Z - Pagamento em duas prestações mensais iguais, a 1ª no ato da compra, com 20% de desconto.
A melhor e a pior das alternativas, para o comprador, são...(considere juros compostos).

03) (IBGE/CESGRANRIO) - Carlos tem dinheiro suficiente para comprar uma geladeira, à vista. Caso ele opte pôr comprá-la a prazo, guardará o dinheiro que sobrar em uma caderneta de poupança, que renderá 25% ao mês. Considere as alternativas:

I) comprar à vista, com 22% de desconto.
II) comprar, com 10% de desconto, em duas prestações iguais, sendo a primeira paga no ato da e a segunda paga um mês depois.
III) pagamento integral, sem desconto, um mês após a compra.

A melhor e a pior alternativa para Carlos são, respectivamente:

a) I e II b)I e III c) II e III d) III e I e) III e II

04) (AFRF) - Uma pessoa paga uma entrada no valor de $ 23,60 na compra de um equipamento, e paga mais 4 prestações mensais, iguais e sucessivas, no valor de $ 14,64 cada uma. A instituição financiadora cobra uma taxa de juros de 120% a.a. capitalizados mensalmente (juros compostos). Com base nestas informações podemos afirmar que o valor que mais se aproxima do valor à vista do equipamento adquirido, é ($):

a) 70,00 b) 76,83 c) 86,42 d) 88,00 e)95,23

05) Uma loja oferece duas opções de pagamento:

a) Á vista, com 30% de desconto.
b) Em duas vezes prestações mensais iguais, sem desconto, a primeira sendo paga no ato da compra.

06) A Insinuante, no natal de 2010, oferecia as alternativas de pagamento:

a) pagamento de uma só vez, um mês após a compra.
b) três pagamentos mensais iguais sem juros, o primeiro no ato da compra. Se você fosse cliente da Mesbla, qual seria a sua opção? O que você está admitindo implicitamente?

07) Uma geladeira na loja Ricardo Eletro custa R$ 2.000 à vista e pode ser paga em três prestações mensais iguais. Se forem cobrados juros de 6% ao mês sobre o saldo devedor, determine o valor da prestação, supondo a primeira prestação paga:

a) na compra.
b) um mês após a compra
c) dois meses após a compra.

08) Uma casa é vendida à vista pôr R$ 318.000,00 ou prazo pôr R$ 90.000,00 de entrada, mais 3 prestações mensais de R$ 80.000,00 cada uma. Qual a melhor alternativa para um comprador que pode aplicar seu dinheiro à taxa de 3% a.m.? E se a taxa fosse i = 1% a.m.?