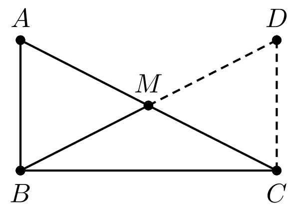
Ponto médio lembra? Outro ponto médio! Dois pontos médios lembram? Base média!

Cícero Thiago

28 de março de 2011

Propriedade 1. Num triângulo retângulo ABC, a mediana BM relativa à hipotenusa mede metade da hipotenusa AC.



Prova.

Seja D o ponto sobre o prolongamento da mediana BM tal que $BM = MD$. Os triângulos AMB e CMD são congruentes, pelo caso LAL. Daí, $AB = CD$ e $\angle BAM = \angle DCM$, ou seja, AB e CD são segmentos iguais e paralelos e portanto

$$\angle ABC = \angle DCB = 90^\circ.$$

Assim, os triângulos ABC e DCB são congruentes, pelo caso LAL, e portanto

$$BD = AC \implies 2 \cdot BM = AC \implies BM = \frac{AC}{2} \cdot$$

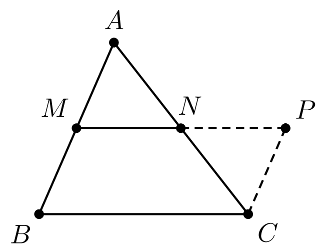
■

Definição 1. Uma base média de um triângulo é um segmento que une os pontos médios de dois de seus lados.

Assim, todo triângulo possui exatamente três bases médias.

Propriedade 2. Sejam ABC um triângulo e M, N os pontos médios dos lados AB, AC, respectivamente. Então

$$MN \parallel BC \quad \text{e} \quad MN = \frac{BC}{2} \cdot$$



Prova.

Inicialmente, prolonguemos a base média MN até um ponto P tal que $MN = NP$. Em seguida, construímos o triângulo CNP. Note que os triângulos ANM e CNP são congruentes, pelo caso LAL. Daí, $CP = AM$ e $\angle MAN = \angle PCN$ e portanto

$$CP \parallel AM \quad \Longrightarrow \quad CP \parallel BM.$$

Assim, $MBCP$ é um paralelogramo, pois CP e BM são segmentos paralelos e iguais. Mas então $MP \parallel BC$ e

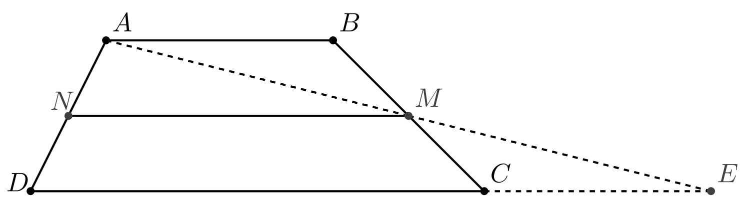
$$MP = BC \quad \Longrightarrow \quad 2MN = BC \quad \Longrightarrow \quad MN = \frac{BC}{2}\cdot$$

■

Definição 2. A base média de um trapézio é o segmento que une os pontos médios de seus lados não paralelos.

Propriedade 3. Seja $ABCD$ um trapézio de bases AB e CD, e sejam M e N os pontos médios dos lados BC e AD, respectivamente. Então,

$$MN \parallel AB,\ MN \parallel CD \quad \text{e} \quad MN = \frac{AB+CD}{2}.$$



Prova.

Inicialmente, prolonguemos AM até encontrar DC no ponto E. É fácil ver que

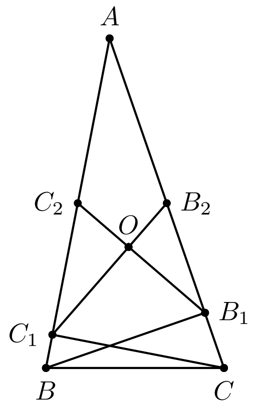
$$\Delta ABM \equiv \Delta CME\ (ALA) \Rightarrow AB = CE.$$

Portanto, MN é base média do triângulo ADE. Assim,

$$MN \parallel BE \Rightarrow MN \parallel DC \Rightarrow MN = \frac{DE}{2}.$$

Finalmente, $MN = \dfrac{DC+CE}{2} = \dfrac{DC+AB}{2}$. ■

Problema 1. (OBM) Considere um triângulo acutângulo ABC com $\angle BAC = 30°$. Sejam B_1, C_1 os pés das alturas relativas aos lados AC, AB, respectivamente, e B_2, C_2 os pontos médios dos lados AC, AB, respectivamente. Mostre que os segmentos B_1C_2 e B_2C_1 são perpendiculares.



Solução.

Seja O a interseção entre B_1C_2 e B_2C_1. O segmento B_1C_2 é uma mediana do triângulo retângulo AB_1B e portanto

$$AC_2 = B_1C_2 \quad \text{e} \quad \angle C_2B_1A = \angle BAB_1 = 30°.$$

Analogamente, $AC_1B_2 = 30°$. Daí,

$$\angle BC_2B_1 = \angle C_2B_1A + \angle BAB_1 = 60°$$

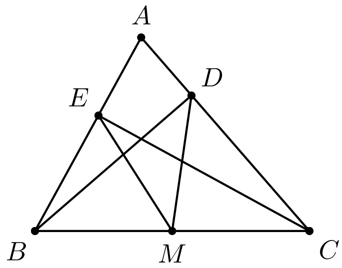
e portanto

$$\angle C_1OC_2 = 180° - \angle BC_2B_1 - \angle AC_1B_2 = 90°.$$

■

Problema 2. Sejam ABC um triângulo e M o ponto médio do lado BC. Se D, E são os pés das alturas relativas aos lados AC, AB, respectivamente, prove que $ME = MD$.

Solução.



Note que ME é mediana relativa à hipotenusa do triângulo BEC. Daí,

$$ME = BM = CM$$

e, analogamente,

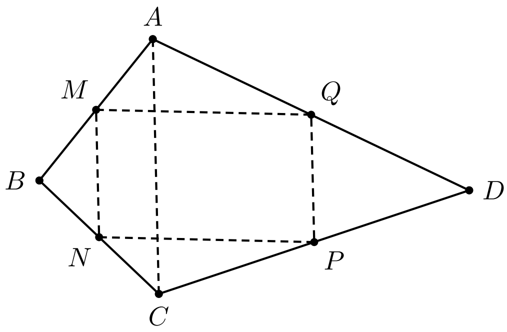
$$MD = BM = CM.$$

Assim, $ME = MD$. ■

Comentários. M é o centro da circunferência circunscrita ao quadrilátero inscritível $BCDE$.

Problema 3. Dado um quadrilátero $ABCD$, prove que os pontos médios M, N, P, Q dos lados AB, BC, CD, DA formam um paralelogramo.

Solução.



Temos

- Triângulo ABC: $MN \parallel AC$ e $MN = AC/2$.
- Triângulo DAC: $PQ \parallel AC$ e $PQ = AC/2$.

Assim, $MN \parallel PQ$ e $MN = PQ$, isto é, $MNPQ$ é paralelogramo. ∎

Problema 4. Sejam ABC um triângulo e M o ponto médio de BC. Se $AM = BM = CM$, prove que $\angle BAC = 90°$.

Problema 5. (Torneio das Cidades) Sejam $ABCD$ um paralelogramo, M o ponto médio de CD e H o pé da perpendicular baixada de B a AM. Prove que BCH é um triângulo isósceles.

Problema 6. Em um triângulo ABC, retângulo em A e isósceles, sejam D um ponto no lado AC ($A \neq D \neq C$) e E o ponto no prolongamento de BA tal que o triângulo ADE é isósceles. Se P é o ponto médio de BD, R o ponto médio de CE e Q a interseção entre ED e BC, prove que o quadrilátero $ARQP$ é um quadrado.

Problema 7. No triângulo acutângulo ABC, CF é altura e BM é mediana. Sabendo que $BM = CF$ e $\angle MBC = \angle FCA$, prove que o triângulo ABC é eqüilátero.

Problema 8. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $\angle ABC = \angle CDA = 90^o$ e $\angle BCD > \angle BAD$. Prove que $AC > BD$.

Problema 9. Seja ABC um triângulo acutângulo tal que $\angle B = 2\angle C$, AD é perpendicular a BC, com D sobre BC, e E o ponto médio de BC. Prove que $AB = 2DE$.

Problema 10. Seja ABC um triângulo e D um ponto sobre o lado AC tal que $AB = CD$. Sejam E e F os pontos médios de AD e BC, respectivamente. Se a reta BA intersecta a reta FE em M, prove que $AM = ME$.

Problema 11. Uma reta r passa pelo baricentro de um triângulo ABC. As projeções de A, B e C sobre a reta r são M, N e P, respectivamente. Prove que $AM = BN + CP$.

Problema 12. (OBM) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, onde N é o ponto médio de DC, M é o ponto médio de BC, e O é a interseção entre as diagonais AC e BD. Mostre que O é o baricentro do triângulo AMN se, e somente se, $ABCD$ é um paralelogramo.

Problema 13. (China) Seja $ABCD$ um trapézio, $AD//BC$, $\angle B = 30^o$, $\angle C = 60^o$, E, M, F, N os pontos médios de AB, BC, CD, DA respectivamente. Se $BC = 7$, $MN = 3$, determine a medida de EF.

Problema 14. (China) Seja $ABCD$ um trapézio, $AB//CD$, $\angle DAB = \angle ADC = 90^o$, e o triângulo ABC é equilátero. Se a base média do trapézio $EF = \frac{3}{4}a$, determine o comprimento da menor base AB, em função de a.

Problema 15. (Moscou) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e O um ponto em seu interior tal que $\angle AOB = \angle COD = 120^o$, $AO = OB$, $CO = OD$. Sejam K, L, M os pontos médios de AB, BC, CD respectivamente, prove que ΔKLM é equilátero.

Problema 16. (China) Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $AD//BC$. Se a bissetriz do ângulo $\angle DAB$ intersecta CD em E, e BE bissecta o ângulo $\angle ABC$, prove que $AB = AD + BC$.

Problema 17. (China) Seja $ABCD$ um quadrilátero, tal que $AD > BC$. Sejam E e F os pontos médios de AB e CD respectivamente. Se as retas AD e BC intersectam FE em H e G respectivamente, prove que $\angle AHE < \angle BGE$.

Problema 18. Seja ABC um triângulo e sejam D e E pontos sobre os lados AB e AC, respectivamente, tais que $AD = DB$, $AE = 2EC$ e BE intersecta CD em F. Prove que $4EF = BE$.

Problema 19. (OBM) Num quadrilátero convexo, a reta que passa pelos pontos médios de dois lados opostos forma ângulos iguais com ambas as diagonais. Mostre que as duas diagonais têm o mesmo comprimento.

Problema 20. Se um segmento paralelo a um lado de um triângulo tem uma extremidade no ponto médio de um lado e a outra extremidade no terceiro lado, prove que esta extremidade é ponto médio do terceiro lado.

Problema 21. (OBM) No triângulo ABC, D é ponto médio de AB e E ponto sobre o lado BC tal que $BE = 2 \cdot EC$. Sabendo que $\angle ADC = \angle BAE$, calcule o valor de $\angle BAC$.

Problema 22. (Austrália) Sejam ABC um triângulo e P um ponto em seu interior de modo que $\angle PAC = \angle PBC$. Se L, M são os pés das perpendiculares por P aos lados BC, AC, respectivamente, e D é o ponto médio de AB, prove que $DL = DM$.

Problema 23. (Romênia) Sejam ABC um triângulo isósceles com $AB = AC$, D o ponto médio de BC, M o ponto médio de AD e N a projeção de D sobre BM. Prove que $\angle ANC = 90°$.

Problema 24. (Eslovênia) Seja $ABCD$ um trapézio, com AB paralelo a CD. Sabendo que a distância entre os pontos médios das bases é igual à distância entre os pontos médios das diagonais, prove que $\angle DAC$ e $\angle DBC$ são ângulos obtusos.

Problema 25. Em um triângulo isósceles ABC, com $AB = BC$, sejam K, L pontos sobre AB, BC, respectivamente, tais que $AK + LC = KL$. A reta paralela a BC passando pelo ponto médio M de KL intersecta AC em N. Ache a medida de $\angle KNL$.

Problema 26. Sejam ABC um triângulo e D, E, F os pontos médios de BC, CA, AB, respectivamente. Prove que

$$\angle DAC = \angle ABE \iff \angle AFC = \angle ADB.$$

Problema 27. Seja $ABCD$ um trapézio com bases $AB = a$ e $CD = b$. Sejam também M, N os pontos médios dos lados AB, CD, respectivamente. Sabendo que $\angle DAB + \angle ABC = 90°$, determine o comprimento de MN.

Problema 28. (OBM) Sejam $ABCD$ um quadrilátero convexo, N o ponto médio de DC, M o ponto médio de BC e O a interseção entre as diagonais AC e BD. Mostre que O é o baricentro do triângulo AMN se e somente se $ABCD$ é um paralelogramo.

Problema 29. (Cone Sul) Seja ABC um triângulo acutângulo e sejam AN, BM e CP as alturas relativas aos lados BC, CA e AB, respectivamente. Sejam R, S as projeções de N sobre os lados AB, CA, respectivamente, e Q, W as projeções de N sobre as alturas BM, CP, respectivamente.

(a) Mostre que R, Q, W, S são colineares.

(b) Mostre que $MP = RS - QW$.

Problema 30. (TST Brasil) Sejam Q o ponto médio do lado AB de um quadrilátero inscritível $ABCD$ e S a interseção das diagonais AC e BD. Sejam P, R as projeções ortogonais de S sobre AD, BC, respectivamente. Prove que $PQ = QR$.

Bibliografia

1. Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses, for section vol. 1.
Xu Jiagu
World Scientific

2. Problems and solutions in euclidean geometry.
M. N. Aref e William Wernick
Dover

3. Challenging problems in geometry.
Alfred Posamentier e Charles Salkind
Dover