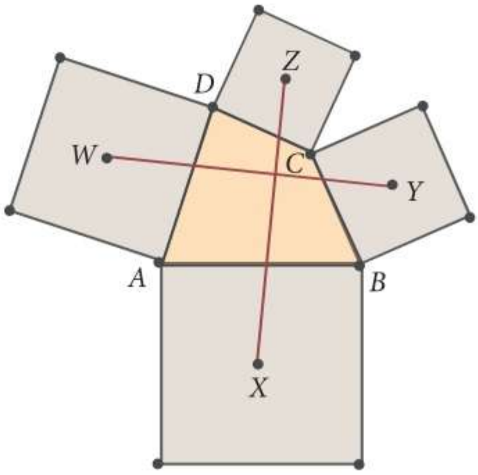
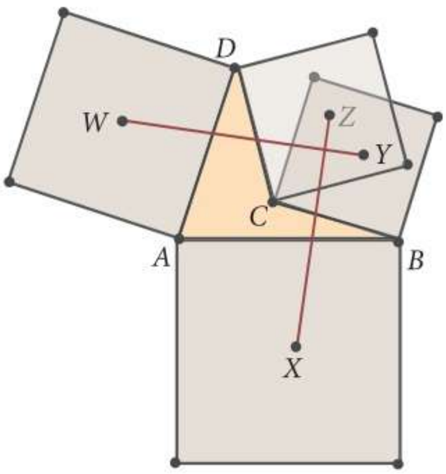
UMA GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE VAN AUBEL

SERGIO ALVES – IME-USP

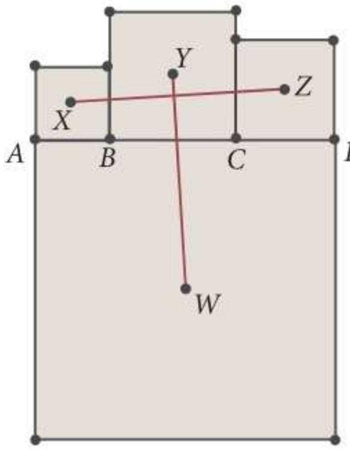
O resultado dado a seguir, conhecido na literatura como teorema de van Aubel, foi publicado em 1878 pelo holandês Henricus Hubertus van Aubel (1830-1906).

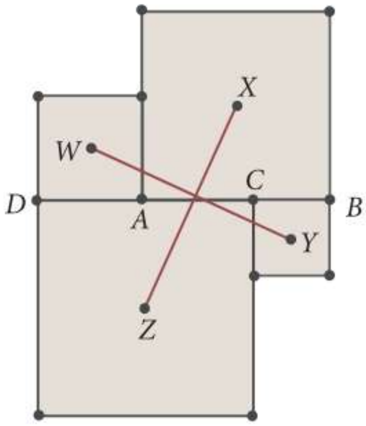
Teorema 1. Dado um quadrilátero arbitrário *ABCD*, sejam *X*, *Y*, *Z e W* os centros dos quadrados construídos externamente sobre os lados *AB*, *BC*, *CD* e *DA*, respectivamente, do quadrilátero. Nessas condições, tem-se $\overleftrightarrow{XZ} \perp \overleftrightarrow{YW}$ e $XZ = YW$.





Observe que o quadrilátero *ABCD* pode ser convexo ou não convexo. O teorema continua válido para "quadriláteros" *ABCD* em que, por exemplo, os lados *AB* e *CD* se intersectam. Os quadrados podem ser construídos externamente ou internamente sobre os lados do quadrilátero (neste último caso, supõe-se que *ABCD* não seja um quadrado). O teorema vale até mesmo quando *ABCD* é um quadrilátero degenerado. As figuras a seguir indicam algumas possibilidades. Em [1] estão ilustradas várias situações nas quais o teorema de van Aubel é verdadeiro. Vale a pena conferir!





Além de destacar uma bela propriedade válida para todo quadrilátero, o que chama a atenção neste teorema é a variedade de provas apresentadas ao longo dos anos. Existem demonstrações para todos os gostos. Algumas utilizam fatos básicos da geometria euclidiana plana, outras geometria analítica, outras trigonometria. Ainda há aquelas que usam vetores, números complexos e vai por aí afora. O leitor curioso não terá dificuldade de encontrá-las na internet.

Nessa busca, também não será difícil achar algumas extensões do teorema de van Aubel nas quais os quadrados são substituídos por quadriláteros convenientemente escolhidos. Por exemplo, em [2] é analisado o caso em que paralelogramos semelhantes são construídos externamente sobre os lados do quadrilátero *ABCD*.

Nosso interesse aqui neste artigo aponta para outra direção. O que acontece se substituirmos os quadrados por polígonos regulares de n lados? Respostas para o caso particular $n = 3$ encontram-se em [3] e [4], usando trigonometria e números complexos, respectivamente.

Abordaremos o caso geral por meio da geometria das transformações. Iniciamos associando ao centro X de um n-ágono regular P_n um outro ponto especial.

Sendo AB um lado arbitrário de P_n, considere o ponto X^* tal que: (a) X^* pertence à mediatriz do segmento AB; (b) X e X^* estão do mesmo lado da reta AB; (c) $m(\angle AX^*B) = 180^\circ - m(\angle AXB)$. Nessas condições, o ponto X^* será chamado **suplementar** do centro X relativo ao lado AB.

Note que, como $m(\angle AXB) = \dfrac{360^\circ}{n}$, segue que $m(\angle AX^*B) = 180^\circ - \dfrac{360^\circ}{n}$. No caso $n=3$, se X é o centro de um triângulo equilátero ABC, então, o suplementar de X relativo ao lado AB coincide com o vértice C do triângulo. Para $n = 4$, o centro X de um quadrado e seu suplementar X^* relativo a qualquer lado do quadrado são pontos coincidentes. A figura a seguir ilustra, além destes casos, o centro X de um pentágono regular $ABCDE$ e seu suplementar X^* relativo ao lado AB.