O USO DE TRANSFORMAÇÕES ISOMÉTRICAS NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE FAGNANO

George da Costa Euzébio

INTRODUÇÃO

Segundo a habilidade EM13MAT105 da Base Nacional Comum Curricular, os alunos de ensino médio devem saber

> utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). (BRASIL, 2018, p. 533)

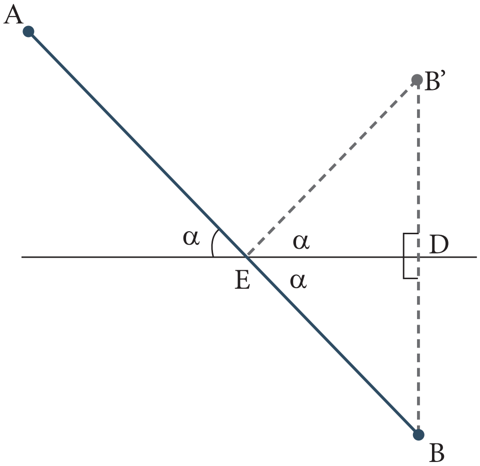
Assim, o professor de matemática deve fazer uso de ferramentas que possibilitem ao aluno entender e resolver problemas matemáticos utilizando essas noções.

Em determinada etapa do ensino da geometria é corriqueiro aparecer situações que trabalham propriedades geométricas na busca de um valor máximo ou mínimo que satisfaça as condições exigidas do problema como, por exemplo, "calcular a área máxima de um triângulo retângulo dado o valor da hipotenusa".

Com o intuito de trabalhar as noções de transformações isométricas aplicadas na solução de problemas geométricos, abordaremos o Problema de Fagnano que consiste em "encontrar o triângulo DEF de perímetro mínimo inscrito em um triângulo acutângulo ABC dado". Esse problema pode ser solucionado utilizando-se técnicas de cálculo, porém há uma solução que pode ser apreciada por alunos de nível médio da educação básica e que faz uso das ferramentas citadas.

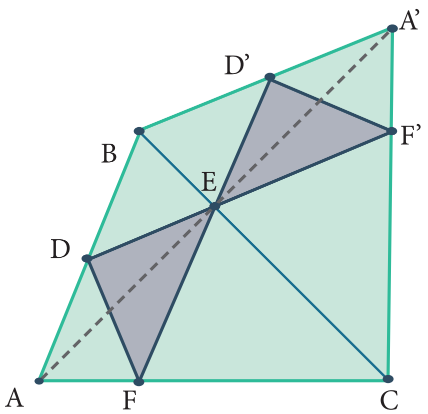
DESENVOLVIMENTO

Como mencionado anteriormente, para a solução do problema, usaremos as propriedades da transformação isométrica conhecida como reflexão. Para isso definiremos a reflexão como uma transformação que preserva a distância entre dois pontos em relação a uma reta dada. Desse modo, dados os pontos A e B e a reta *r*, o ponto B', como mostra a figura a seguir, é chamado de reflexão do ponto B em relação à reta *r*.



É fácil observar que $EB' = EB$, pelo fato de o ΔEBD ser congruente ao $\Delta EB'D$, pelo caso de congruência *LAL*, onde *ED* é um lado comum aos triângulos, $EDB = EDB'$ e uma vez que o ponto *B'* é escolhido de modo que $BD = B'D$, com *BB'* perpendicular à reta *r*.

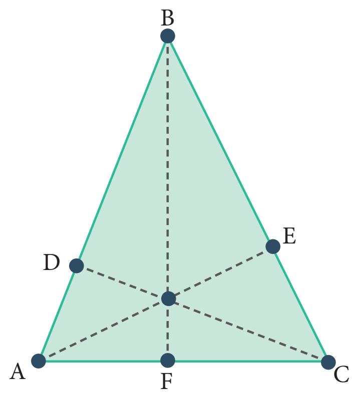
Antes de solucionarmos o Problema de Fagnano, vamos mostrar que, ao refletirmos o triângulo órtico de um triângulo *ABC* qualquer, dois dos lados do triângulo órtico refletido são continuação dos lados correspondentes do triângulo órtico original.



No triângulo ABC acima, após fazermos a reflexão da figura pelo lado *BC* , o segmento *AE* é a altura relativa ao lado *BC* e ao mesmo tempo bissetriz do ângulo *DÊF*, pois *DEF* é o triângulo órtico de *ABC*. Igualmente, o segmento *A'E* é altura relativa ao lado *BC* do triângulo *A'BC* e também bissetriz do ângulo *D'ÊF'*. Os segmentos *AE* e *A'E* são colineares, pois possuem o ponto *E* em comum e formam um ângulo de 90° com o lado *BC*. Caso esses segmentos não fossem colineares, formariam um triângulo com soma dos ângulos internos maior que 180°. Como os triângulos *DEF* e *D'EF'* são congruentes (por construção), os ângulos *DÊF* e *D'ÊF'* são congruentes e nos mostram que os de ângulos *AÊF* e *A'ÊD'* são congruentes, portanto, como possuem o ponto *E* em comum, são *OPV* e os segmentos *FE* e *ED'* são colineares. Analogamente, temos que *DE* e *EF'* são colineares. Isso nos mostra que, ao refletirmos um triângulo *ABC* por um de seus lados, os triângulos órticos possuirão lados colineares.

Problema de Fagnano: Seja *ABC* um triângulo acutângulo. Determinar o triângulo *DEF* inscrito no triângulo *ABC,* de modo que *DEF* possua o menor perímetro possível.

Para solucionar o problema, iniciaremos com um triângulo acutângulo arbitrário *ABC* no qual inscreveremos o triângulo órtico *DEF* e mostraremos que esse triângulo é o elemento buscado para a solução desse problema.



Para mostrarmos que o perímetro do triângulo órtico é o menor possível, faremos as reflexões sucessivas do triângulo *ABC* pelos lados *BC*, CA_1, B_1A_1, B_1C_1, C_1A_2, de modo a obter a linha poligonal reta composta por segmentos colineares formados por reflexões de triângulos órticos. Os segmentos são alinhados por construção devido ao resultado anterior.