artigo

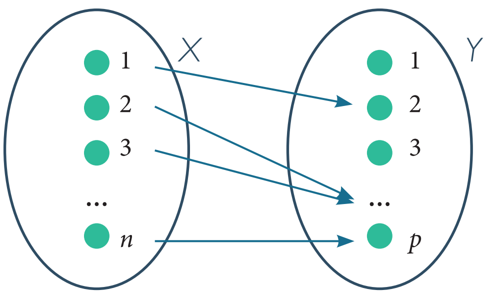
SOBREJEÇÕES EM CONJUNTOS FINITOS

MIGUEL JORGE

Quando explicamos aos alunos o que são funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras, usamos, inicialmente, conjuntos finitos para mostrar diversos exemplos. Nesse contexto são frequentes as perguntas: "quantas são as funções bijetoras entre dois conjuntos com o mesmo número de elementos?", ou ainda, "dados dois conjuntos finitos X e Y, quantas são as funções injetoras de X em Y?"

São perguntas interessantes e fáceis de responder se o aluno já está familiarizado com combinatória. Entretanto, "dados dois conjuntos finitos X e Y, quantas são as funções sobrejetoras de X em Y?" Essa pergunta não é fácil de responder, e obter essa resposta é o objetivo deste artigo.

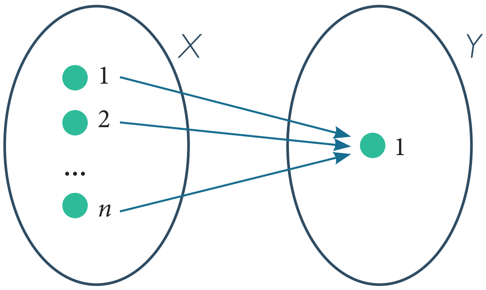
Consideremos então o conjunto X com n elementos e o conjunto Y com p elementos. O número de funções definidas em X e tomando valores em Y pode ser obtido pelo seguinte raciocínio: cada elemento de X deve ser associado a apenas um elemento de Y, e isso pode ocorrer de p modos diferentes.



Assim, o número de funções definidas de X em Y será $p \cdot p \cdot p \cdot \ldots \cdot p = p^n$. Em seguida, para obter o número de funções sobrejetoras, basta subtrair de p^n o número de funções que não são sobrejetoras. O argumento é óbvio, mas a execução não é muito simples. Acompanhe todos os passos.

1) Quando o conjunto Y tem apenas 1 elemento, o número de funções de X em Y será $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots 1 = 1^n$. Todas serão sobrejetoras.

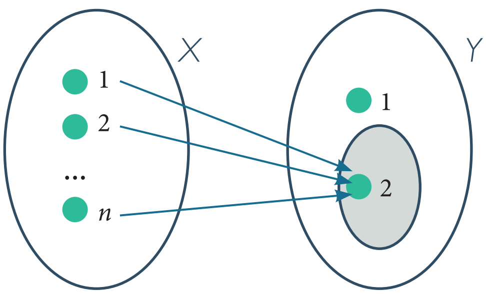
Usaremos a notação $S_1 = 1^n$ que significa o número de sobrejeções sobre 1 elemento.



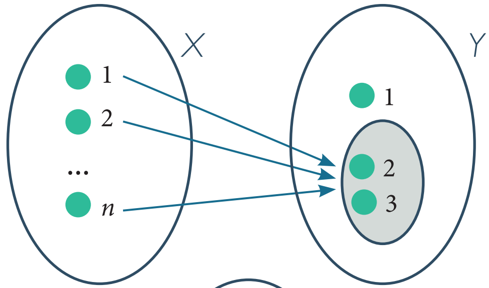
2) Quando o conjunto Y tem dois elementos, o número de sobrejeções de X em Y será a diferença entre o número total de funções, que é igual a 2^n menos o número de funções em que um elemento de Y não será imagem de qualquer elemento de X, ou seja, existem

$$S_2 = 2^n - 2 \cdot 1 = 2^n - C_2^1 S_1 = 2^n C_2^0 - 1^n C_2^1$$

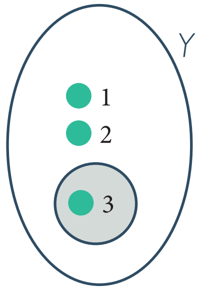
sobrejeções sobre dois elementos.



3) Quando o conjunto Y tem três elementos, o número de sobrejeções de X em Y será a diferença entre o número total de funções, que é igual a 3^n, e o número de funções de X em Y em que um elemento de Y não será imagem de qualquer elemento de X, e também aquelas em que dois elementos de Y não são imagens de quaisquer elementos de X, ou seja, $C_3^2 S_2$ e $C_3^1 S_1$, respectivamente,



e



Ou seja, existem

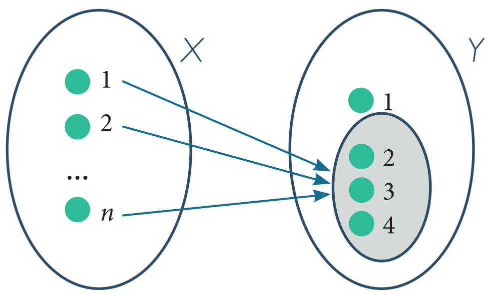
$$S_3 = 3^n - C_3^1 S_1 - C_3^2 S_2$$

$$S_3 = 3^n - C_3^1 S_1 - C_3^2 \left(2^n - C_2^1 S_1\right)$$

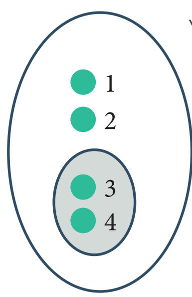
$$S_3 = 3^n C_3^0 - 2^n C_3^1 + 1^n C_3^2$$

funções sobrejetoras sobre um conjunto de três elementos.

4) Analogamente, se Y tem quatro elementos, a situação é descrita pela figura a seguir,



e



e