

Construção de Fractais Geométricos com o GeoGebra: Árvores Bifurcadas e o Triângulo de Sierpinski

Lucas R. Wanderley¹, Rafael A. Souto², Maria Ângela C. Didier³
& Thiago Yukio Tanaka⁴

Resumo

Este trabalho tem o propósito de apresentar dois objetos de destaque da Geometria Fractal: as Árvores Bifurcadas e o Triângulo de Sierpinski. Abordaremos suas definições, propriedades e a construção, passo a passo, de cada um desses objetos com a utilização do *software* livre GeoGebra (versão *Classic*). Além disso, sugerimos atividades que podem ser adaptadas para possíveis aplicações no ensino de Matemática em qualquer nível do Ensino Básico, uma vez que o conteúdo que envolve esses objetos fractais não é usualmente tratado e traz situações interessantes e não comuns quando comparados com a Geometria Euclidiana. Por exemplo, o surgimento de figuras planas com medidas de área nula e perímetro infinito. A Geometria Fractal, aliada aos suportes tecnológicos de Geometria Dinâmica como o GeoGebra, permite o desenvolvimento de várias pesquisas voltadas para o ensino-aprendizado da Matemática e de outras áreas, desde as ciências naturais às econômico-sociais e à tecnologia. Inserimos uma seção onde indicamos um *link* de acesso às resoluções das atividades propostas e aos fractais construídos pelos autores deste artigo utilizando o GeoGebra. Esperamos estimular o leitor a construir novos modelos matemáticos para auxiliar os estudos de Matemática Pura e/ou Aplicada.

Palavras-Chave: Fractais; Triângulo de Sierpinski; Árvores Bifurcadas; GeoGebra; Ensino.

1 INTRODUÇÃO

A Geometria Fractal é cronologicamente jovem, com pouco mais de 160 anos, tendo suas primeiras aparições em meados dos anos 1857 e 1913 quando um grupo de cientistas catalogaram alguns objetos, que hoje conhecemos por fractais, como “monstros” por não terem “forma perfeita” à luz da Geometria Euclidiana e julgaram (equivocadamente) que tais figuras não teriam significativo valor para a ciência. O termo fractal vem do latim *fractus* e significa “quebrar” e foi criado pelo matemático francês Benoit B. Mandelbrot em meados de 1975 [10], quando esses estudos começaram a ser difundidos, inicialmente com construções do que hoje denominamos de fractais clássicos, como o Conjunto de Cantor, a Curva de Koch e o Triângulo de Sierpinski.

¹ Universidade Federal Rural de Pernambuco E-mail: lucaswanderley1398@gmail.com

² Universidade Federal Rural de Pernambuco E-mail: rafael7souto@outlook.com

³ Universidade Federal Rural de Pernambuco E-mail: angelacidier@gmail.com

⁴ Universidade Federal Rural de Pernambuco E-mail: thiago.tanaka@ufrpe.br



Figura 1: Da esquerda para a direita, temos: o Conjunto de Cantor (5 iterações), a Curva de Koch (4 iterações) e o Triângulo de Sierpinski (4 iterações). Fonte: [12] e [13].

Segundo Mandelbrot, “Um fractal é conjunto para o qual a dimensão de Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica” [13]. Por Feder: “Um fractal é uma forma cujas partes se assemelham a seu todo sob alguns aspectos” [13]. Por Falconer: “o conjunto F é um fractal se pode ser expresso através de um processo recursivo ou iterativo” [13]. Essas figuras geométricas ao contrário do que se pensava inicialmente, possuem diversas aplicações relevantes de contexto socioeconômico e hoje compõem uma área que se sobressai por sua aplicabilidade.

O conceito de dimensão fractal nos dá uma noção numérica acerca do que conhecemos por rugosidade de um determinado objeto fractal, sendo utilizado em várias áreas científicas, como nos estudos dos sistemas caóticos e imprevisíveis, mais especificamente, nas previsões dos preços das ações da bolsa de valores. Outro tipo de aplicação seria o reconhecimento de padrões em imagens, permitindo melhorias na qualidade das impressões de objetos com grande quantidade de detalhes de uma maneira mais próxima da realidade [12]. Também encontramos na arte, a produção de figuras artificiais de grande apreciação e jamais vistas antes de sua criação, como os Conjuntos de Julia e os Conjuntos de Mandelbrot apresentados na Figura 2.

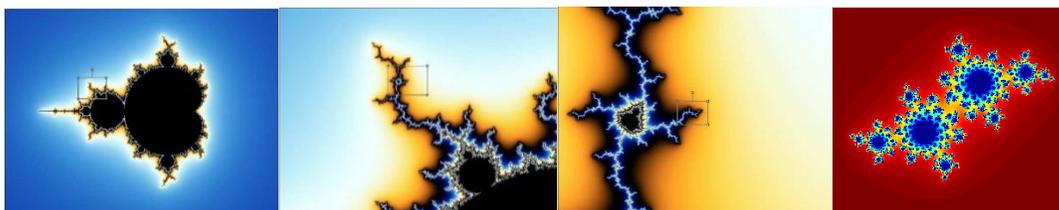


Figura 2: Da esquerda para a direita, três imagens de Conjuntos de Mandelbrot e a de um Conjunto de Julia. Fonte: [12].

No cinema, com a utilização do computador, são produzidas imagens artificiais semelhantes a objetos reais como nuvens, montanhas, galhos de árvores entre outros [13]. Na medicina temos, por exemplo, sua aplicação descrita na quantificação do grau de rejeição pós-transplante cardíaco em [11] e no estudo da heterogeneidade da perfusão regional pulmonar em [4].



Figura 3: Da esquerda para a direita, representações de fractais aleatórios: nuvens, montanhas, ramo de uma samambaia e ramificações das artérias coronárias. Fonte: [13].

Os fractais possuem aplicabilidade em muitas áreas do conhecimento e convidamos o leitor a fazer uma breve pesquisa para reconhecer a relevância dos estudos nessa área. É importante salientar que padrões no qual o todo se reproduz em partes menores (autossimilaridade) não é exclusividade de construções artificiais, podemos observar esses padrões também na natureza.



Figura 4: Da esquerda para a direita, padrões fractais na natureza: afluentes de rios, ramos de árvores, formato dos raios e bactérias. Fonte: [13].

A 49ª edição da Revista do Professor de Matemática (RPM) foi pioneira na temática da Geometria Fractal com a proposta de construção de fractais clássicos com o *software* de Geometria Dinâmica *iGeom* [5]. Na 57ª edição há possibilidades de estudos dos fractais com investigação sobre cálculos de área e perímetro dessas figuras utilizando progressões geométricas [14]. Já a 72ª edição traz uma apresentação de um fractal não tão conhecido: o fractal de Grossman, cuja construção se relaciona diretamente com a sequência de Fibonacci [7]. Artigos sobre o *software* livre GeoGebra foram abordados em quatro publicações da RPM. Sua estreia ocorreu na edição 67ª edição com uma apresentação geral do programa, destacando o forte potencial de utilização para composições de atividades computacionais em sala de aula [2]. A 85ª edição trata sobre a possibilidade de criação de ferramentas adicionais além daquelas que já existem no programa. Para isso é utilizada a opção “criar uma nova ferramenta” no menu “ferramentas” [8]. A edição seguinte reforça as possibilidades de utilização do GeoGebra em sala de aula com um relato de sua utilização em um trabalho desenvolvido com discentes do 2º ano do ensino médio do Colégio de Aplicação da UFRJ (CAp/UFRJ), em que eles deveriam construir logotipos utilizando gráficos de funções com restrição em seus respectivos domínios [6]. Por fim, o artigo [1] da 87ª edição fez um compilado das possibilidades das ferramentas 3D.

Neste trabalho, apresentaremos a construção de uma Árvore Bifurcada e do Triângulo de Sierpinski com o auxílio do GeoGebra, foco principal deste trabalho. Vale ressaltar que o processo de construção de um fractal não se completa em um número finito de passos. Ele se dá pela aplicação de uma regra de transformação geométrica em determinadas partes do objeto resultante, repetidas vezes. De forma ideal, infinitas vezes.

2 ÁRVORES BIFURCADAS E O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

Existem diversas categorias de fractais em relação à sua construção, dentre as quais podemos destacar os que são definidos por sistemas de funções iteradas e são conhecidos como fractais determinísticos ou geométricos. Esses fractais são caracterizados por possuírem uma regra fixa de substituição geométrica. Os fractais desse tipo possuem autossimilaridade exata, ou seja, o fractal é idêntico em diferentes escalas. As Árvores Bifurcadas e o Triângulo de Sierpinski são fractais desse tipo [13]. Adiante, apresentamos

definições, propriedades e construções desses objetos fractais. Descrevemos, passo a passo, o processo de construção destas figuras realizado com o *software* GeoGebra.

2.1 Árvores Bifurcadas

As Árvores Bifurcadas são fractais gerados por funções iterativas *tipo árvore*, ou seja, têm em seu processo iterativo ramificações que se assemelham-se a árvores. A sua construção parte de um segmento vertical (que será o tronco), e desse segmento teremos um ângulo de bifurcação onde o tronco se ramificará gerando, a partir de um fator de redução/ampliação fixado, novos “galhos” e a cada passo o número de galhos da árvore dobra. Um fato interessante é que podemos avaliar se a árvore será limitada ou não, conforme o valor de seu fator de redução/ampliação, que denotamos por r . Usando alguns elementos de trigonometria em [13], mostra-se que para $r < 1$ a árvore será limitada e para $r \geq 1$, não existe região que a limite. Abaixo, temos variações de árvores de acordo com o ângulo de bifurcação.

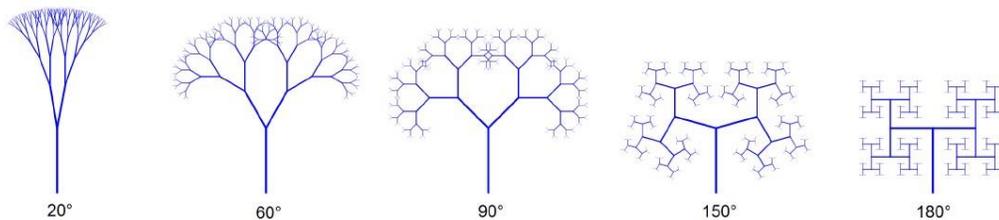


Figura 5: Árvores Bifurcadas. Fonte: [13]

Utilizando o GeoGebra, é possível visualizar algumas iterações do processo de construção de uma Árvore Bifurcada. A seguir, apresentaremos o passo a passo da construção dessas árvores no GeoGebra.

Passo 1: Clique com o botão direito do mouse na janela de visualização do GeoGebra e desmarque as opções EXIBIR EIXOS e SEM MALHA para retirar os eixos e a malha da tela, seguindo os passos dados na figura abaixo:

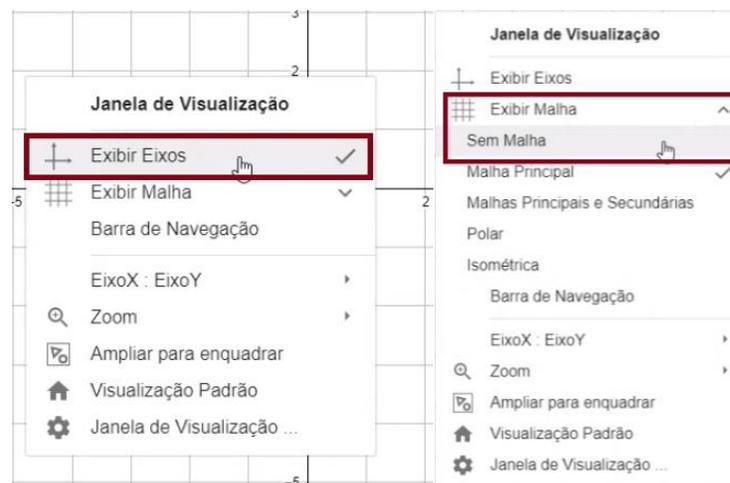


Figura 6: Retirada da malha e dos eixos da janela de visualização. Fonte: Autores.

Passo 2: Acesse a ferramenta SEGMENTO no menu principal para construir os segmentos AB e BC. Com a ferramenta, clique em dois lugares quaisquer da janela de visualização e isso formará o segmento AB. Em seguida, clique no ponto B e em outro local qualquer da janela para formar o segmento BC.

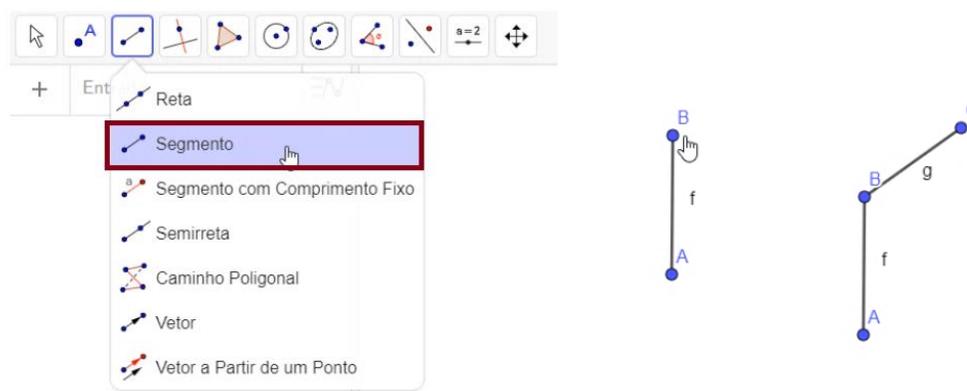


Figura 7: Construção dos segmentos AB e BC. Fonte: Autores.

Observe que o segmento AB foi automaticamente rotulado por f e o segmento BC por g.

Passo 3: Utilizando a ferramenta ÂNGULO no menu principal, vamos formar o ângulo entre os segmentos AB e BC. Com a ferramenta, clique nos segmentos AB e BC, nessa ordem, isso criará o ângulo α .

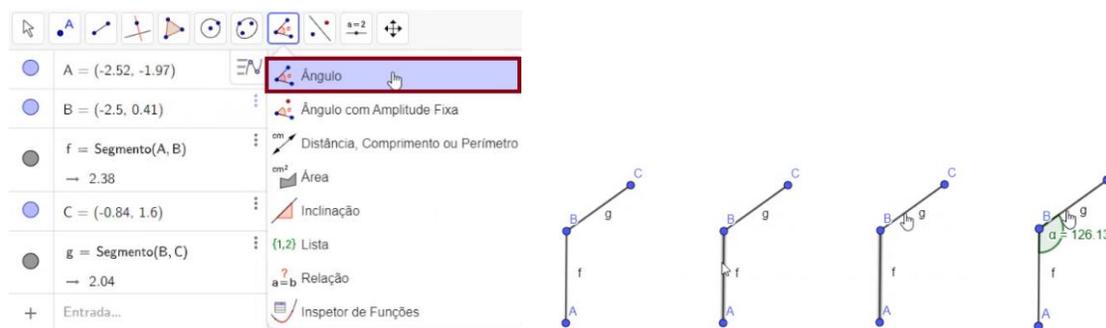


Figura 8: Construção do ângulo α . Fonte: Autores.

Passo 4: Na caixa de entrada, no canto inferior esquerdo da tela, digite $r=f/g$ e pressione ENTER no teclado do seu computador/celular. Na janela de álgebra aparecerá como segue na figura abaixo:



Figura 9: Definindo a razão r. Fonte: Autores.

Passo 5: Utilizando a ferramenta CÍRCULO: CENTRO & RAI0, no menu principal, construa o círculo c centrado no ponto C com raio $r \cdot g$. Clique no ponto C e abrirá uma caixa de diálogo na qual você deve digitar $r \cdot g$.

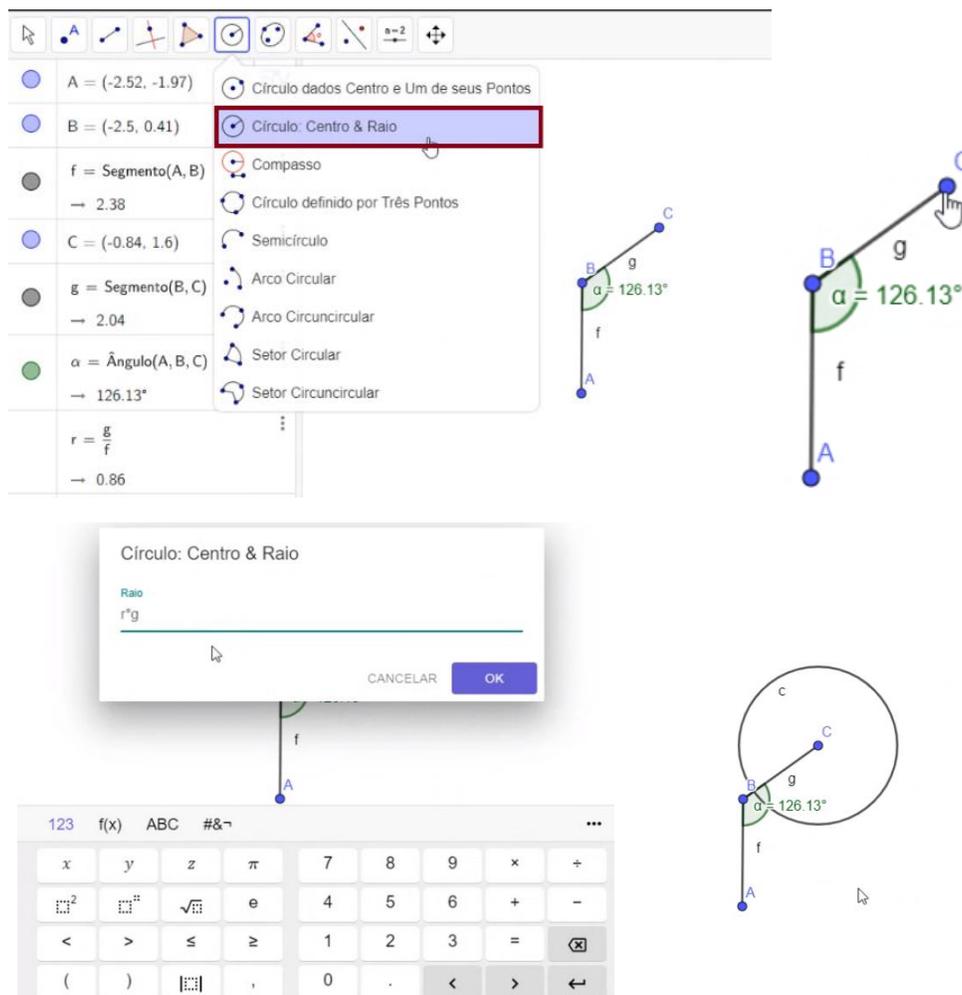
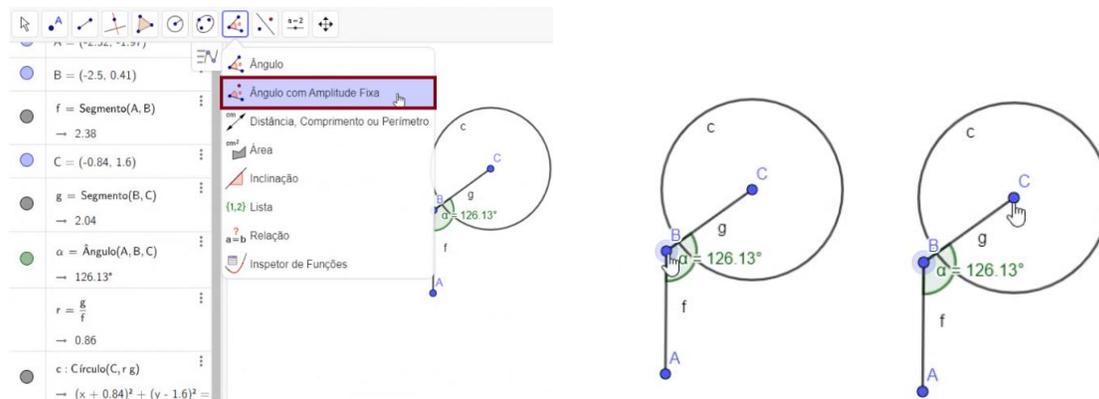


Figura 10: Construção do círculo c . Fonte: Autores.

Passo 6: Utilizando a ferramenta ÂNGULO COM AMPLITUDE FIXA, no menu principal, crie um ângulo β com amplitude igual ao ângulo α . Clique no ponto B e no ponto C , nessa ordem. Na caixa de diálogo que surgirá, digite α . Isso automaticamente criará o ponto B' .



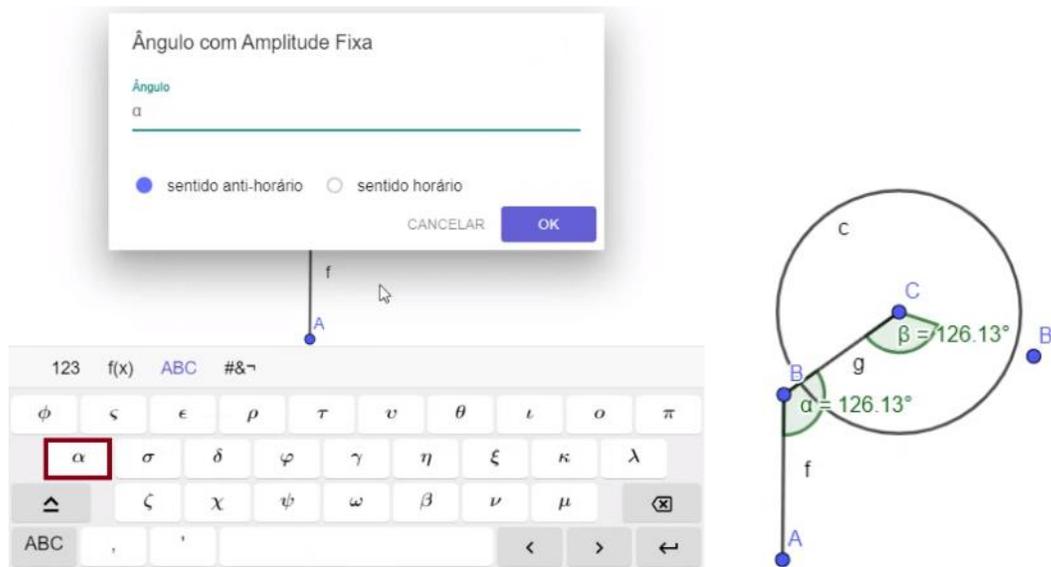


Figura 11: Criação do ângulo β e do ponto B' . Fonte: Autores.

Passo 7: Novamente, utilizando a ferramenta SEGMENTO, crie o segmento CB' que será rotulado por h . Com auxílio da ferramenta INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS, no menu principal, clique no segmento h e no círculo c . Dessa forma, geramos o ponto D de interseção do segmento h com o círculo c .

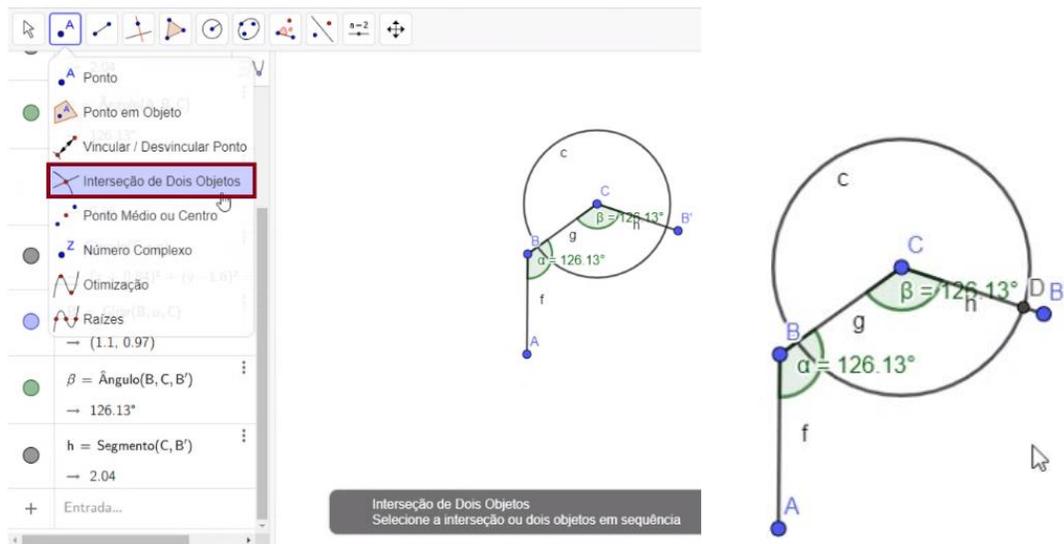


Figura 12: Criação do segmento CB' e do ponto D . Fonte: Autores.

Passo 8: Retire os rótulos dos segmentos AB , BC e de todos os pontos clicando com o botão direito do mouse no objeto desejado e, na caixa de diálogo, desative a opção EXIBIR RÓTULO. Em seguida, oculte a circunferência c , os ângulos β e α , o ponto B' e o segmento h . Para isso, basta dar um clique com o botão direito do mouse no objeto em questão e desmarcar a opção EXIBIR OBJETO. Como exemplo, a figura seguinte apresenta o procedimento para retirar o rótulo do segmento AB :

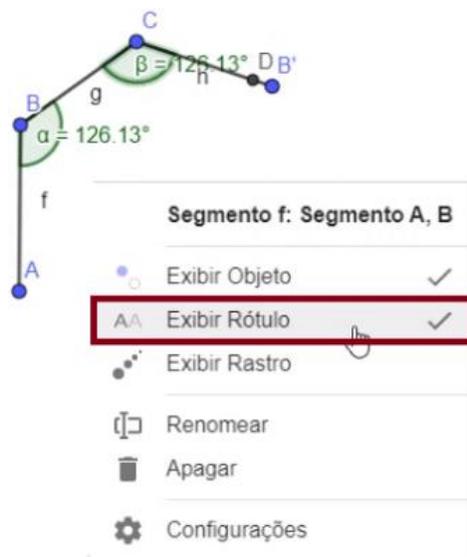


Figura 13: Retirando o rótulo de AB. Fonte: Autores.

E a figura seguinte apresenta o procedimento para ocultar a circunferência c.

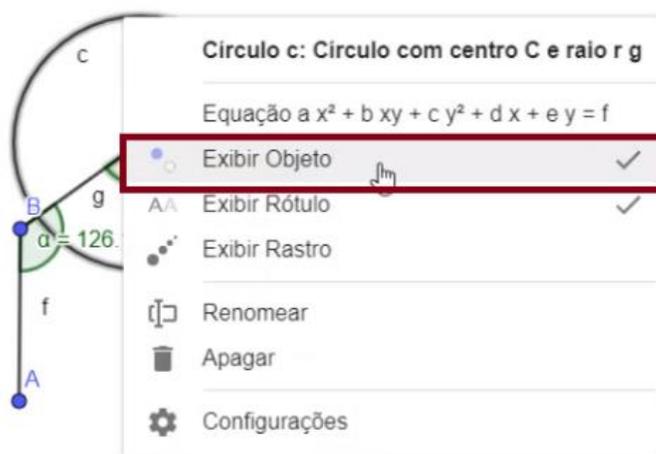


Figura 14: Ocultando a circunferência c. Fonte: Autores.

Para retirar os demais rótulos e ocultar os demais objetos segue-se a mesma ideia.

Passo 9: Crie um segmento com os pontos C e D, e retire o seu rótulo.

No próximo passo vamos criar uma nova ferramenta para o menu principal do GeoGebra. Essa ferramenta construirá novos ramos da Árvore Bifurcada.

Passo 10: Clique nos 3 traços no canto superior direito da tela e escolha a opção FERRAMENTA. Na opção de FERRAMENTA clique na opção CRIAR UMA NOVA FERRAMENTA. Daí, abrirá uma caixa de diálogo e você deverá selecionar em OBJETOS FINAIS o segmento “i:segmento CD” e o ponto “D: ponto de intersecção c, h”, nessa ordem. Em seguida, vá para a opção de NOME E ÍCONE e clique em concluir.

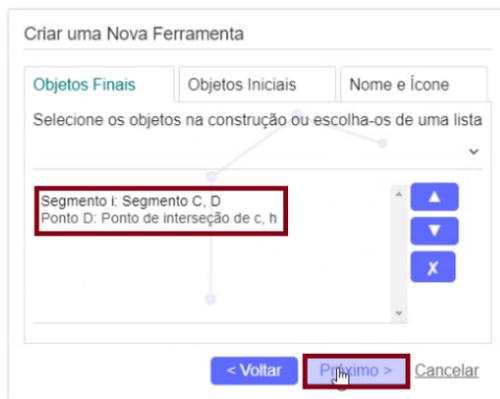
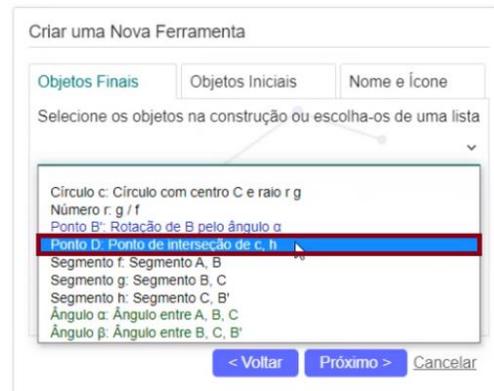
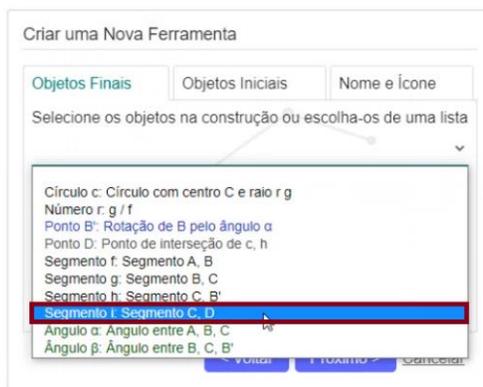
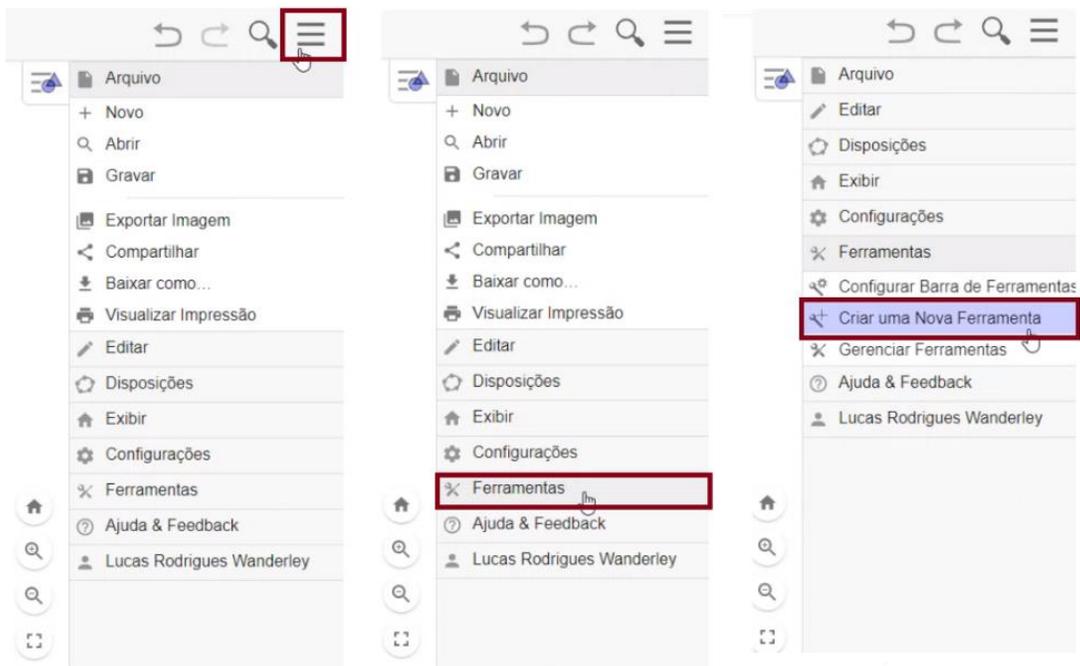


Figura 15: Criando uma nova ferramenta. Fonte: Autores.

Passo 11: Selecione a ferramenta criada no Passo 10, denominada FERRAMENTA 1 no menu principal. Clique nos 3 últimos pontos da árvore, da esquerda para a direita da tela, e, a partir daí aparecerá um novo ramo da árvore.

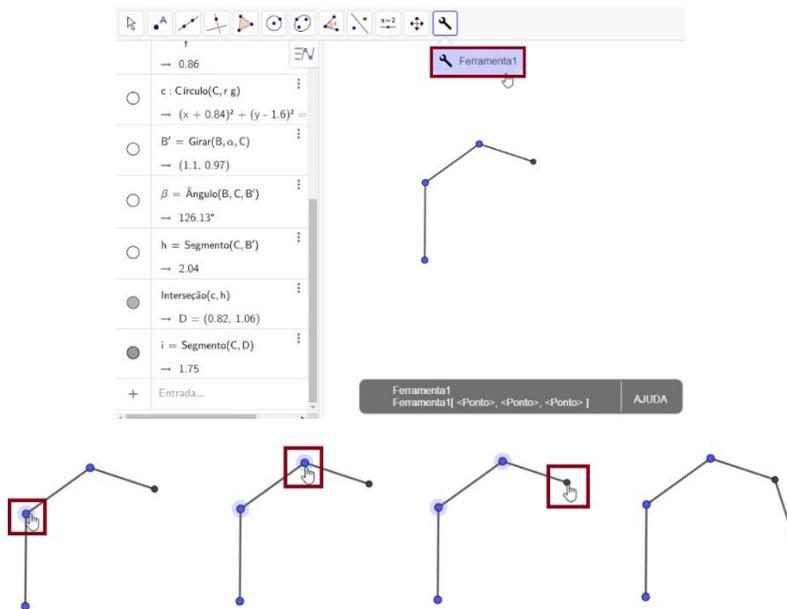


Figura 16: Construção de um novo ramo da árvore. Fonte: Autores.

Realize esse procedimento por mais três vezes. E a figura resultante será:

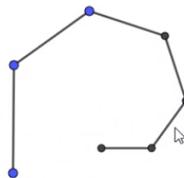


Figura 17: Figura resultante. Fonte: Autores.

Passo 12: No menu principal, escolha a ferramenta REFLEXÃO EM RELAÇÃO A UMA RETA. Selecione o último segmento da árvore e clique no segmento anterior a este, conforme figura abaixo. Como resultado obteremos um novo ramo que será a reflexão do segmento selecionado em relação ao segmento clicado. Note que na figura seguinte o quadrado representa o segmento que será refletido e a mão do mouse indicará o segmento que será o eixo de reflexão.

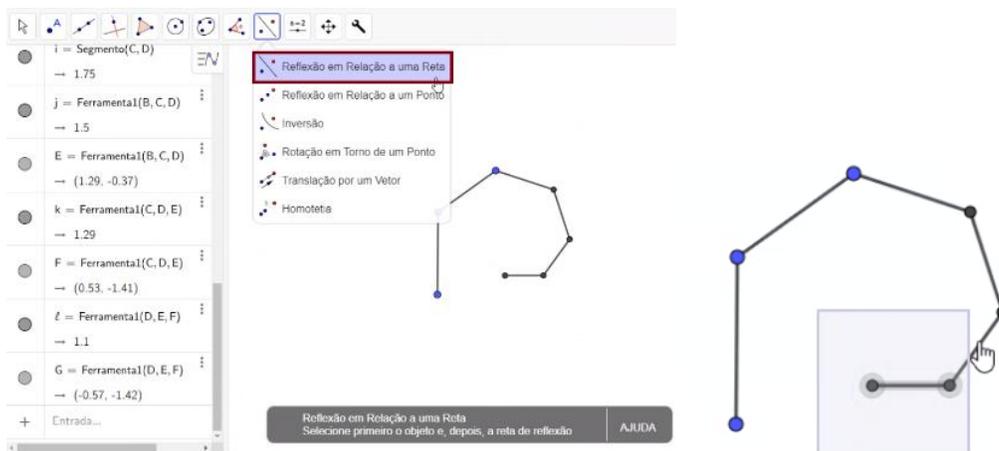


Figura 18: Reflexão em relação a uma reta. Fonte: Autores.

Repita esse procedimento para cada figura selecionada conforme abaixo:

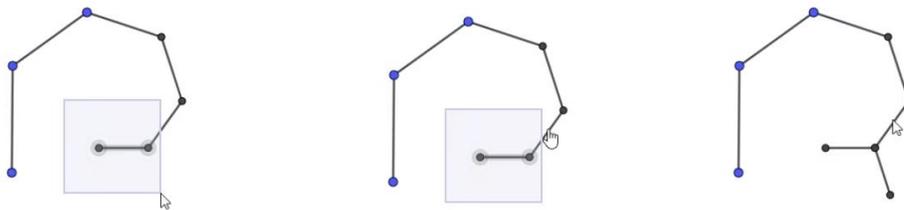


Figura 19: Primeira reflexão. Fonte: Autores.

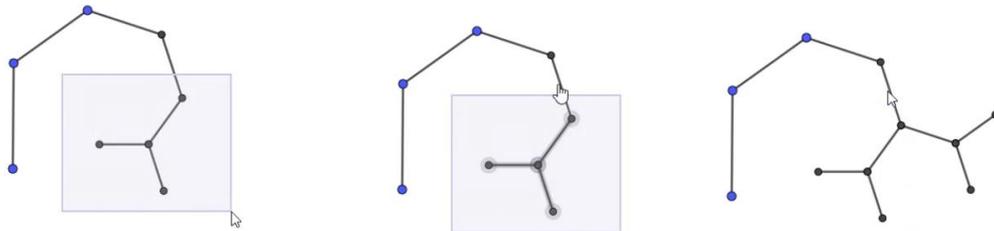


Figura 20: Segunda reflexão. Fonte: Autores.

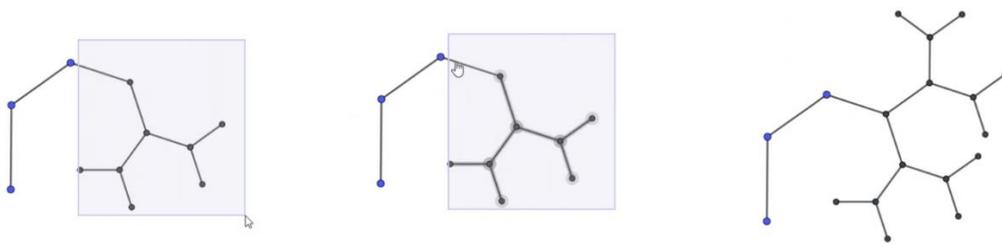


Figura 21: Terceira reflexão. Fonte: Autores.

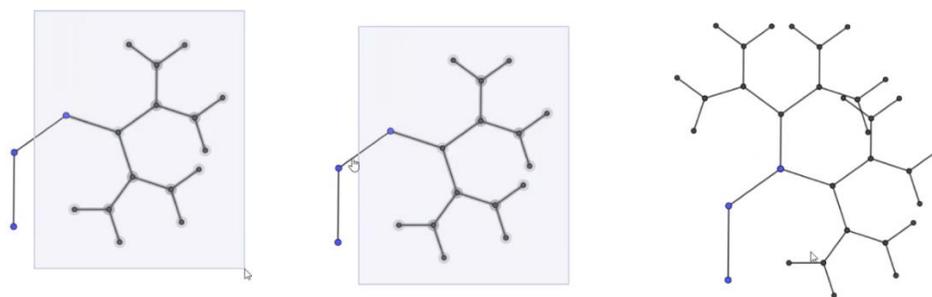


Figura 22: Quarta reflexão. Fonte: Autores.

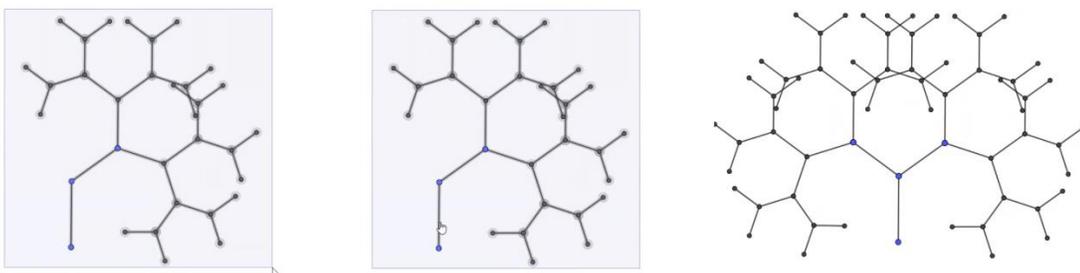


Figura 23: Quinta reflexão. Fonte: Autores.

Assim, você finalizará a sua árvore com o número de galhos que desejar.

Observamos que se você alterar o tamanho dos segmentos AB e CD iniciais e/ou o ângulo α você produzirá novas árvores bifurcadas, conforme as figuras a seguir:

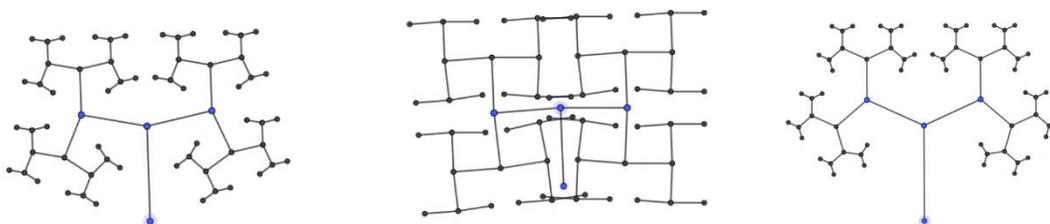


Figura 24: Árvores com diferentes tamanhos para os segmentos AB, CD e amplitude para o ângulo α . Fonte: Autores.

Você pode também alterar as cores da maneira que quiser e obter um resultado de acordo com seu gosto pessoal. No *link* abaixo, disponibilizamos um modelo de fractal do tipo árvore feito pelo nosso grupo.

<https://www.geogebra.org/m/kahfd4wv>

2.2 O Triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski é um fractal obtido a partir da seguinte construção recorrente: a partir de um triângulo equilátero, marcamos os pontos médios de cada lado e retiramos da figura o triângulo cujos vértices são esses pontos médios dos lados do triângulo anterior. A cada nova etapa repetimos o processo em cada novo triângulo equilátero resultante da etapa anterior. O Triângulo de Sierpinski é a figura obtida quando esse processo ocorre indefinidamente. Um fato curioso sobre esse fractal é que ele tem medida de área nula e a medida de perímetro infinita. É possível verificar essas afirmações analisando o que acontece com essas medidas em cada iteração. De fato, supondo que o triângulo inicial tem medida de lado igual a l unidades de comprimento, na n -ésima iteração a medida P_n do perímetro da figura é dada pela expressão

$$P_n = 3l \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n,$$

daí quando $n \rightarrow \infty$, temos que $P_n \rightarrow \infty$. Enquanto sua medida de área, A_n , na n -ésima iteração, é

$$A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4},$$

consequentemente, quando $n \rightarrow \infty$ temos que $A_n \rightarrow 0$.

Conforme observamos na seção anterior, com o auxílio do GeoGebra, podemos observar algumas iterações da construção do Triângulo de Sierpinski. A seguir, descreveremos o passo a passo dessa construção no GeoGebra.

Passo 1: Selecione a ferramenta PONTO no menu principal e crie os pontos A e B no eixo das abscissas conforme a figura abaixo:

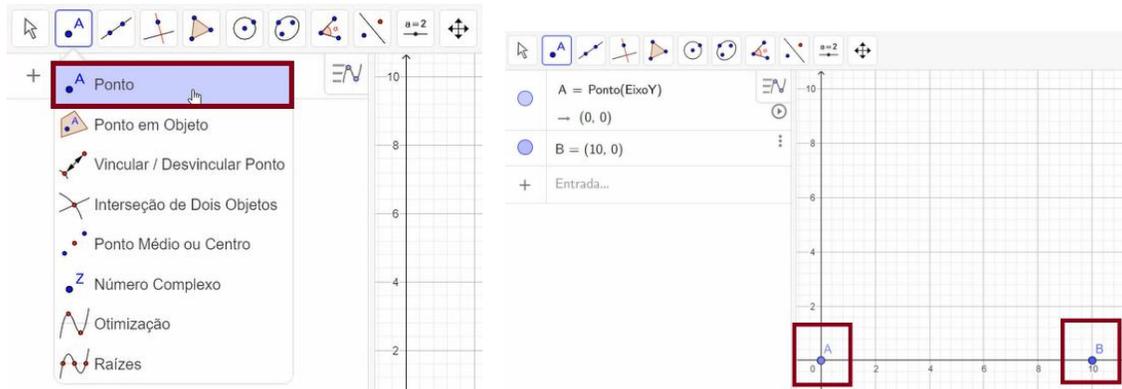


Figura 25: Criação os pontos A e B. Fonte: Autores.

Passo 2: Oculte a malha e o eixo como feito na construção das árvores bifurcadas na seção anterior.

Passo 3: Selecione a ferramenta POLÍGONO REGULAR no menu principal e selecione os pontos A e B. Em seguida, na caixa de diálogo que surgirá, digite o número de vértices para produzir o polígono pol1.

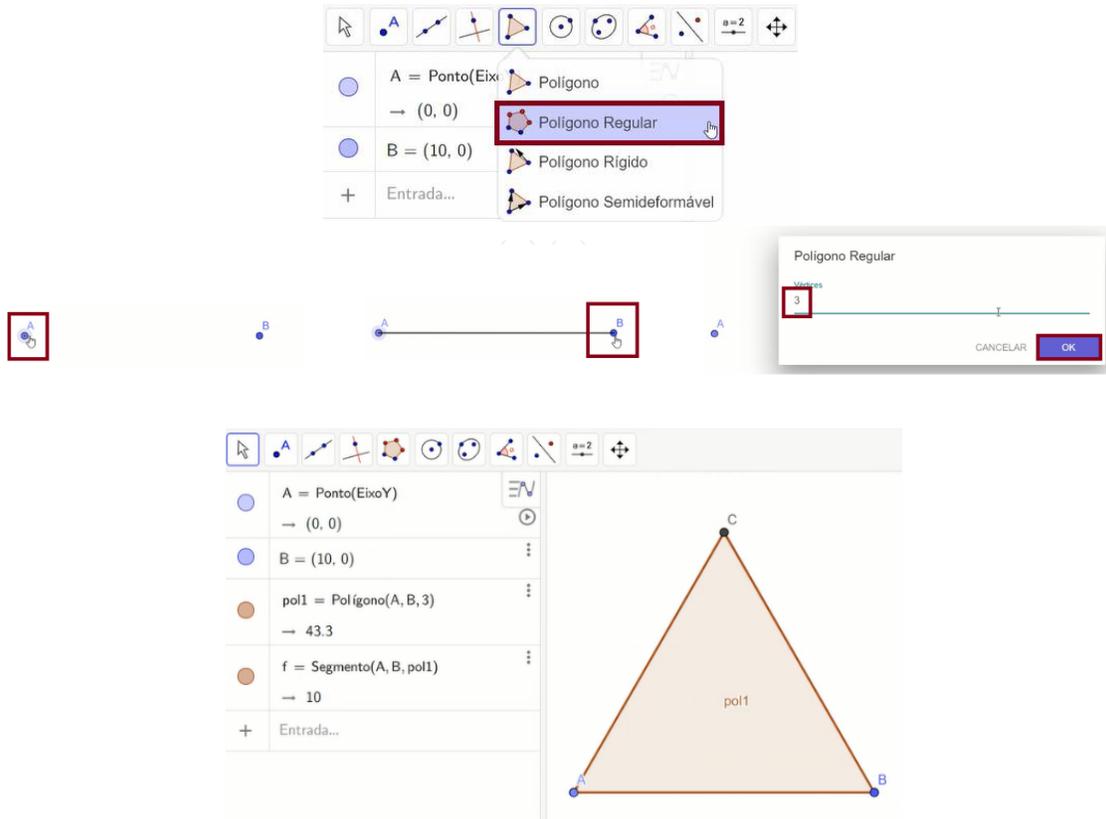


Figura 26: Construção do pol1. Fonte: Autores.

Passo 4: Selecione a ferramenta PONTO MÉDIO OU CENTRO no menu principal. Clique no segmento BC para encontrar o ponto médio D. Da mesma forma, clique nos segmentos AC e AB para encontrar os pontos médios E e F, respectivamente. Em seguida, ainda com a mesma ferramenta, clique no interior do polígono para encontrar o ponto G, centro do triângulo.

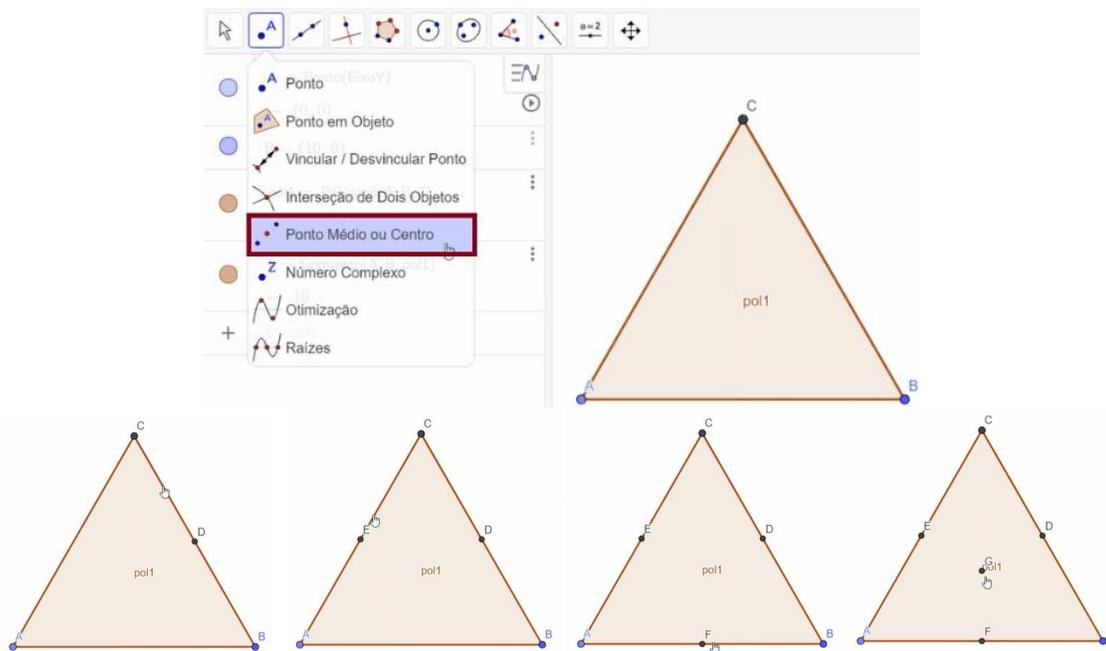


Figura 27: Criação dos pontos médios D, E e F e do centro G. Fonte: Autores.

Passo 5: Na caixa de entrada, crie a lista l1 com os pontos A, B e C conforme a imagem

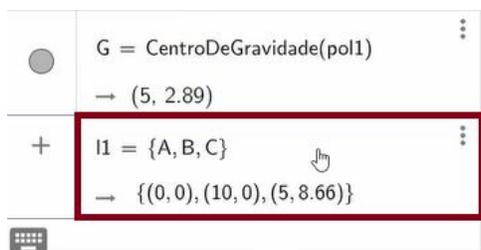


Figura 28: Criação da lista l1. Fonte: Autores.

Passo 6: Na caixa de entrada, utilizando o comando HOMOTETIA, crie a lista l2 com o triângulo obtido aplicando o comando HOMOTETIA do pol1 no centro G com razão $-1/2$ digitando $l2 = \text{Homotetia}(\text{pol1}, -1/2, G)$ e, em seguida, pressionando ENTER no teclado de seu computador/celular. Esta lista l2 aparecerá automaticamente na janela de álgebra do GeoGebra:

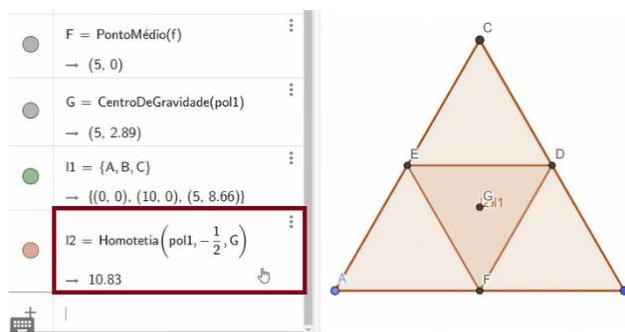


Figura 29: Criação do triângulo I2. Fonte: Autores.

Passo 7: Ainda na caixa de entrada, utilizando o comando SEQUÊNCIA, crie uma lista I3 com três triângulos obtidos aplicando o comando HOMOTETIA da lista I2 nos vértices da lista I1 com razão 1/2. Ou seja, na caixa de entrada, digite $I3 = \text{Sequência}(\text{Homotetia}(I2, 1/2, \text{Elemento}(I1, i)), i, 1, 3)$ e pressione ENTER.

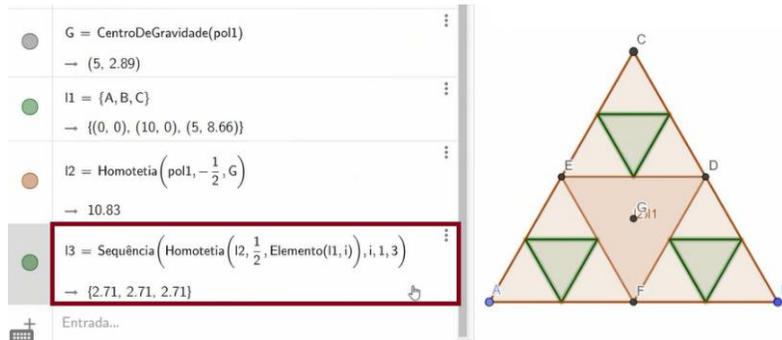


Figura 30: Criação da lista I3. Fonte: Autores.

Passo 8: Novamente, na caixa de entrada, utilizando o comando SEQUÊNCIA, crie uma lista I4 com nove novos triângulos obtidos aplicando o comando HOMOTETIA da lista I3 nos vértices da lista I1 com razão 1/2 digitando $I4 = \text{Sequência}(\text{Homotetia}(I3, 1/2, \text{Elemento}(I1, i)), i, 1, 3)$ e, em seguida, pressionando ENTER.

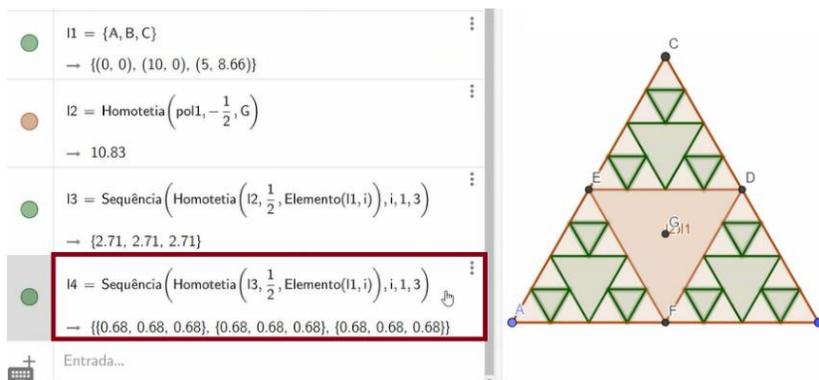


Figura 31: Criação da lista I4. Fonte: Autores.

Daí em diante utilize a mesma ideia do passo anterior para produzir as listas seguintes.

Passo 9: $l_5 = \text{Sequência}(\text{Homotetia}(l_4, 1/2, \text{Elemento}(l_1, i)), i, 1, 3)$.

Passo 10: $l_6 = \text{Sequência}(\text{Homotetia}(l_5, 1/2, \text{Elemento}(l_1, i)), i, 1, 3)$.

Passo 11: $l_7 = \text{Sequência}(\text{Homotetia}(l_6, 1/2, \text{Elemento}(l_1, i)), i, 1, 3)$.

Veja as figuras abaixo.

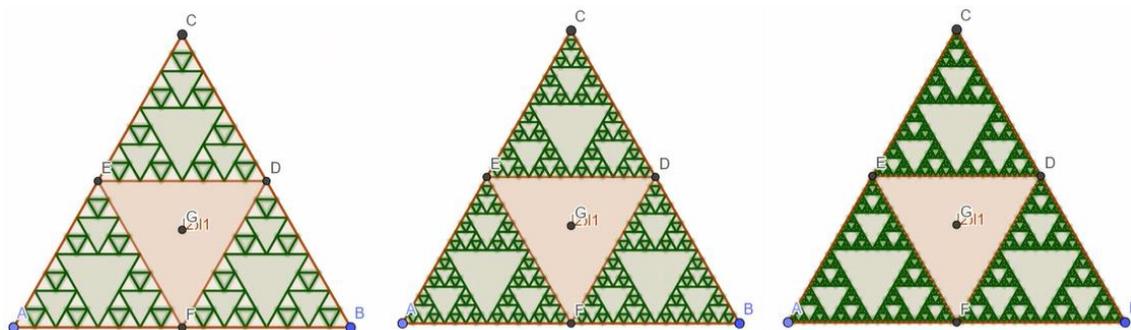


Figura 32: Figuras dos Passos 9, 10 e 11, respectivamente. Fonte: Autores.

Aqui o fractal já está construído, porém só podemos observá-lo na iteração em que paramos a construção. É possível visualizar a formação desse fractal, etapa por etapa, de modo dinâmico. Para isso, utilizaremos a ferramenta chamada **CONTROLE DESLIZANTE**. Siga os passos abaixo.

Passo 12: Selecione a ferramenta **CONTROLE DESLIZANTE** no menu principal.

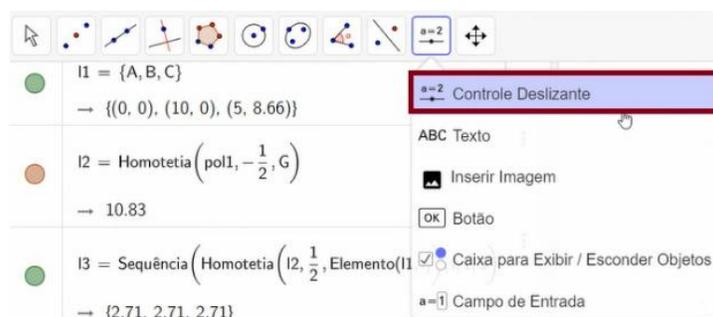


Figura 33: Localizando a ferramenta **CONTROLE DESLIZANTE**. Fonte: Autores.

Passo 13: Clique em qualquer lugar da tela. Daí aparecerá a caixa de diálogo do **CONTROLE DESLIZANTE**. Defina $a=1$, com formato de número e faça a variar no



Figura 34: Criação do CONTROLE DESLIZANTE a. Fonte: Autores.

Passo 14: Na janela de álgebra, selecione a lista I2 e clique nos três pontos no canto superior direito. Escolha a opção de CONFIGURAÇÕES. Na caixa de diálogo, clique em AVANÇADO e digite em CONDIÇÃO PARA EXIBIR OBJETO(S) $0 < a$.

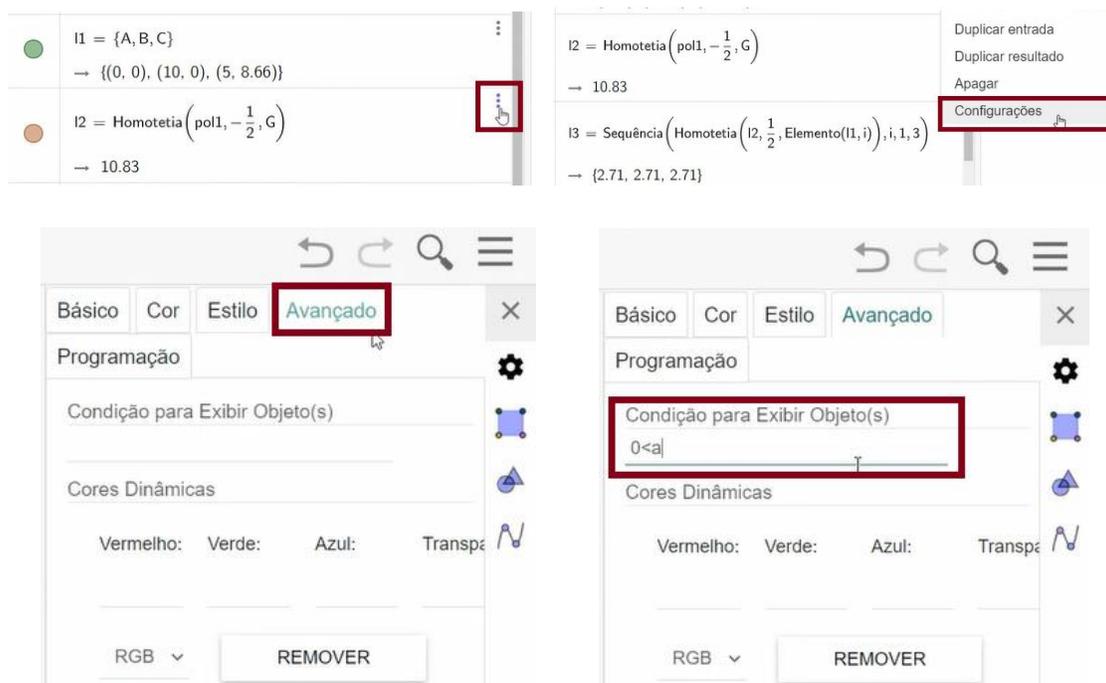


Figura 35: Inserindo a condição para a exibição de I2. Fonte: Autores.

Seguindo o mesmo procedimento, configure os objetos 13, 14, 15, 16 e 17 para serem exibidos quando $1 < a$, $2 < a$, $3 < a$, $4 < a$ e $5 < a$, nessa ordem.

Finalizado esse processo, não só esse fractal vai estar construído como também será possível ver cada passo de sua construção de forma dinâmica através do controle deslizante, pois à medida que “a” variar, veremos as iterações correspondentes da figura. Abaixo, veja o registro de alguns passos da construção do triângulo de Sierpinski.

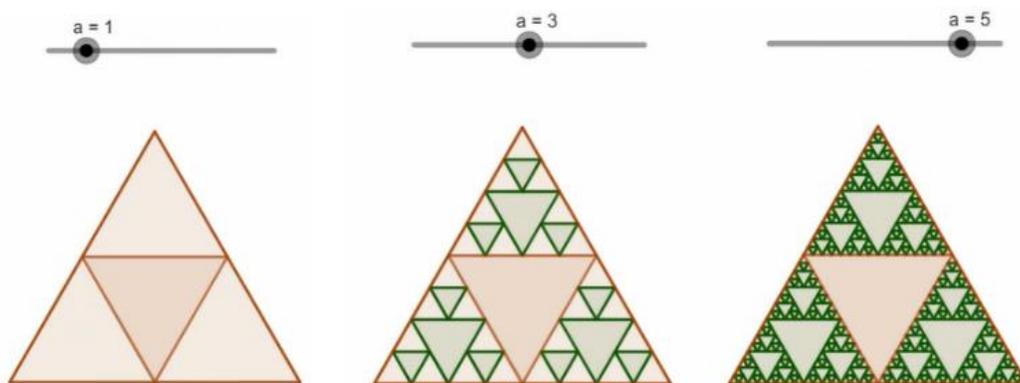


Figura 36: Fractal quando $a=1$, $a=3$ e $a=5$. Fonte: Autores.

Uma construção, realizada pelos autores, do Triângulo de Sierpinski com controle deslizante e informações sobre suas medidas de área e perímetro pode ser encontrada no endereço eletrônico:

<https://www.geogebra.org/m/u63xdpf8>

3 FRACTAIS: UMA FERRAMENTA PARA O ENSINO-APRENDIZADO DE MATEMÁTICA

Na perspectiva da prática como parte fundamental para a consolidação dos seus conhecimentos e como prática da teoria sociointeracionista entre professor e aluno assim como defendido por Lourdes Onuchic no artigo [9], deixaremos algumas sugestões de atividades das quais necessitam de conhecimento sobre progressões geométricas e trigonometria.

Atividade 1. Sabemos que o Triângulo de Sierpinski é definido por uma construção recorrente que nunca acaba, de modo que para observarmos algumas de suas propriedades, precisamos analisar o que ocorre em cada etapa. A cada nova iteração, é possível identificar que a variação da medida da área está relacionada com uma progressão geométrica. Utilizando o GeoGebra para facilitar a visualização desse fractal, identifique a razão desta progressão geométrica e determine o valor da área do fractal.

Atividade 2. Algo semelhante ocorre com o perímetro do Triângulo de Sierpinski. Novamente, constate que a medida do perímetro da figura varia em cada nova iteração conforme uma progressão geométrica, identifique a razão e determine o valor do perímetro do fractal em questão.

Atividade 3. Gere as Árvores Bifurcadas utilizando a construção proposta nesse trabalho com $0 < r < 1$ e $r \geq 1$. Verifique a existência de uma possível região que limite a árvore construída para o valor de r em cada uma das situações descritas. Você deve observar a seção 2.1.

Atividade 4. Uma Árvore Pitagórica é um fractal do tipo árvore em que as ramificações são construídas utilizando triângulos e quadrados nos lugares dos segmentos. Sua tarefa é construir uma árvore seguindo os seguintes passos: construa um quadrado utilizando qualquer ferramenta e sobre o lado superior construa uma circunferência cujo diâmetro tem a mesma medida desse lado e tem seu centro no ponto médio desse lado.

Utilize a ferramenta “Ângulo com Amplitude Fixa” e escolha uma angulação de 1 até 90 graus que parte da extrema esquerda até o centro da circunferência, isso vai automaticamente determinar o ângulo, em seguida marque o ponto sob a circunferência indicada pela angulação. Agora construa um triângulo formado pelas extremidades do segmento superior do quadrado e o ponto sobre a circunferência encontrado no passo anterior. Sob os dois lados do triângulo formado, construa quadrados. Por fim, repita o mesmo procedimento em cada novo quadrado por mais duas vezes. Nessa construção, se o ângulo α tomado é de 60° e a medida do lado do maior quadrado é l , qual a área total (incluindo quadrados e triângulos) da figura na 3ª iteração?

4 OUTRAS CONSTRUÇÕES DE FRACTAIS COM O GEOGEBRA

O GeoGebra é um *software* de Matemática que reúne Geometria, Álgebra, Cálculo, Probabilidade e Estatística. Além de ser livre, é multiplataforma, ou seja, funciona em qualquer sistema operacional. Utilizamos a versão *Classic*, obtida no endereço eletrônico www.geogebra.org.com. Com o auxílio dele, é possível investigar propriedades geométricas e, conseqüentemente, aprender novos conceitos. A utilização desse ambiente gráfico permite a experimentação, a simulação, o questionamento e a análise de situações geométricas contribuindo para o ensino-aprendizado de Matemática e aplicações em áreas afins. À medida que avançamos em nosso estudo de Geometria Fractal, percebemos a importância de sistemas dinâmicos de representação gráfica através da tecnologia digital. Em particular, o GeoGebra nos proporcionou a construção de vários objetos fractais associados à construções geométricas, assim como validar algumas propriedades com prontidão razoável. Dessa forma, além da construção da Árvore Bifurcada e do Triângulo de Sierpinski apresentadas nesse trabalho, disponibilizamos uma lista de outros fractais, dentre os quais destacamos: Círculo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski, Pirâmide de Sierpinski, Esponja de Menger, Floco de neve de Koch, Curva de Koch e a Curva de Hilbert. Deixaremos para o leitor o desafio da descoberta sobre a semente, a transformação ou o processo gerador e de onde é aplicado o processo gerador para a construção desses fractais. Como sugestão de solução, aconselhamos que o leitor tente reproduzir as construções desses fractais no GeoGebra. Para visualizá-los, basta acessar o seguinte endereço eletrônico:

<https://www.geogebra.org/m/fnxpfrs2>

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Destacamos que o GeoGebra é uma plataforma que nos garante a visualização dos objetos produzidos em tempo real, dessa maneira ele é autossuficiente no sentido de não haver necessidade de ter que fazer a construção de um programa em uma determinada linguagem

de programação para obter esse mesmo efeito. É importante reforçar que o nível de construção das figuras pode variar de acordo com as configurações do computador utilizado e, se estiver trabalhando nas versões online, do navegador. Quando estávamos desenvolvendo o estudo das construções com o GeoGebra, em alguns momentos a plataforma aberta no Google Chrome não reconhecia os comandos e estes não eram executados, enquanto o Microsoft Edge processou todos os comandos sem problemas. Também vale observar que para os fractais aqui construídos o(a) leitor(a) pode ir além dos passos descritos, basta repetir o algoritmo usado para construir cada iteração, modificando o que for necessário e, se for o caso, adaptar o controle deslizante. A abordagem da Geometria Fractal numa plataforma como o GeoGebra se faz bastante útil se aplicada em sala de aula, uma vez que essa geometria chama a atenção por possuir características não intuitivas, além de o uso do GeoGebra oferecer uma visualização dinâmica de como um fractal é criado e permite uma maior dinâmica nas explicações sobre suas medidas de área e perímetro, despertando o interesse dos alunos pelos assuntos envolvidos e melhorando os aspectos da aprendizagem. As ferramentas aqui trabalhadas podem ainda possibilitar aos usuários de GeoGebra um refinamento de suas habilidades. Gostaríamos de salientar que estamos à disposição para retirada de dúvidas sobre o assunto, troca de informações, propostas de estudo, entre outros. Basta entrar em contato conosco através dos e-mails informados no início do artigo.

Referências

- [1] ANDRADE, Lenimar. *Geometria espacial com GeoGebra*. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, ed 87. Disponível em: <<http://rpm.org.br/cdrpm/87/41.html>>. Acesso em 25 mai. 2020.
- [2] ARAUJO, Luís. *GeoGebra, um bom software livre*. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, ed 67. Disponível em: <<http://rpm.org.br/cdrpm/67/11.html>>. Acesso em: 25 mai. 2020.
- [3] TED. (2010). **Benoit Mandelbrot: Fractais e a arte da rugosidade**. 1 vídeo (21 min). Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=ay8OMOs6AQ&t=1067s>>. Acesso em: 25 mai. 2020.
- [4] BOTTINO, Daniel, *et al.* *Criação do Sistema BFA para Análise Visual e Não Linear da Perfusão Pulmonar baseado na Técnica das Microsféricas Fluorescentes*. VIII Congresso Brasileiro de Informática em Saúde-CDROM, 2002.
- [5] BRAVIANO, Gilson; RODRIGUES, Maria. *Geometria dinâmica: uma nova geometria?* **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, ed 49. Disponível em: <<http://rpm.org.br/cdrpm/49/5.htm>>. Acesso em: 25 mai. 2020.
- [6] CORREA, Priscila. *Logotipos, funções e Geogebra: uma combinação bem-sucedida*. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, ed 86. Disponível em: <<http://rpm.org.br/cdrpm/86/36.html>>. Acesso em: 25 mai. 2020.

- [7] DIAS, Ana. *O fractal de Grossman*. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, ed 72. Disponível em: <<http://rpm.org.br/cdrpm/72/7.html>>. Acesso em: 25 mai. 2020.
- [8] DANTAS, Sérgio; FERREIRA, Guilherme. *Criando e integrando novas ferramentas no Geogebra*. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, ed 85. Disponível em: <<http://rpm.org.br/cdrpm/85/4.html>>. Acesso em: 25 mai. 2020.
- [9] LEAL, Luiz, ONUCHIC, Lourdes. *Ensino e Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas Como Prática Sociointeracionista*. *Bolema*, Rio Claro, v. 29, n. 53, p. 955-978, dez. 2015. Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2015000300955&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em 13 abr. 2020.
- [10] MANDELBROT, Benoit B. *The fractal geometry of nature*. New York: WH freeman, 1983.
- [11] MOREIRA, Roberto Douglas *et al.* *Dimensão fractal na quantificação do grau de rejeição celular miocárdica pós-transplante cardíaco*. *Rev Bras Cir Cardiovasc*, São José do Rio Preto, v. 26, n. 2, p. 155-163, June 2011. Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-76382011000200004&lng=en&nrm=iso>. Acessado em 30 Mar. 2020.
- [12] NUNES, R.S.R. *Geometria fractal e aplicações*. Tese (Mestrado em Ensino da Matemática) Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2006.
- [13] RABAY, Y.S.F. et al. *Estudo e aplicações da geometria fractal*. Tese (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.
- [14] SALLUM, Elvia. *Fractais no ensino médio*. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, ed 57. Disponível em: <<http://rpm.org.br/cdrpm/57/1.htm>>. Acesso em 25 mai. 2020.