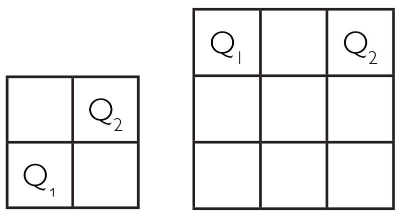
QUESTÕES COM QUESTÕES

(Fuvest 2020. Matemática, 2ª fase, Questão 3) Um quadriculado é formado por $n \times n$ quadrados iguais, conforme ilustrado para $n = 2$ e $n = 3$. Cada um desses quadrados será pintado de azul ou de branco. Dizemos que dois quadrados Q_1 e Q_2 do quadriculado estão conectados se ambos estiverem pintados de azul e se for possível, por meio de movimentos horizontais e verticais entre quadrados adjacentes, sair de Q_1 e chegar a Q_2 passando apenas por quadrados pintados de azul.



$n = 2$ $\qquad$ $n = 3$

a) Se $n = 2$, de quantas maneiras distintas será possível pintar o quadriculado de modo que o quadrado Q_1 do canto inferior esquerdo esteja conectado ao quadrado Q_2 do canto superior direito?

b) Suponha que $n = 3$ e que o quadrado central esteja pintado de branco. De quantas maneiras distintas será possível pintar o restante do quadriculado de modo que o quadrado Q_1 do canto superior esquerdo esteja conectado ao quadrado Q_2 do canto superior direito?

c) Suponha que $n = 3$. De quantas maneiras distintas será possível pintar o quadriculado de modo que o quadrado Q_1 do canto superior esquerdo esteja conectado ao quadrado Q_2 do canto superior direito?

RESPONSÁVEIS
EDUARDO WAGNER
E JOSÉ LUIZ PASTORE MELLO.
ENVIE SUAS SUGESTÕES DE PROBLEMAS PARA RPM
– QUESTÕES COM QUESTÕES
IME/USP – CIDADE UNIVERSITÁRIA
RUA DO MATÃO, 1020, BLOCO B, SALA 105
05508-090– SÃO PAULO, SP
OU PARA RPM@SBM.ORG.BR

Resolução (publicada por diversos autores)

a) indicado por A a cor azul e B a cor branca, temos as seguintes possibilidades:

1.

A	A
A	B

2.

B	A
A	A

3.

A	A
A	A

Totalizando 3 possibilidades.

b) Mantendo a notação do item anterior, temos as seguintes possibilidades:

1.

A	A	A
	B	

Neste caso, cada um dos quadrados em branco pode assumir qualquer uma das duas cores. Logo, este caso admite $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ possibilidades.

2.

A		A
A	B	A
A	A	A

Neste caso, apenas um dos quadrados pode assumir as duas cores, totalizando 2 possibilidades.

Porém, o caso em que todos os quadrados são pintados de azul, exceto o central, é contado duas vezes. Assim, temos

$$\boxed{32 + 2 - 1 = 33}$$

c) Vamos novamente separar em casos:

1. Caso em que o quadrado entre Q_1 e Q_2 é pintado de azul:

A	A	A

Neste caso, cada um dos 6 quadrados em branco pode assumir as duas cores, totalizando $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$ possibilidades.

2. Caso em que o quadrado entre Q_1 e Q_2 é pintado de branco. Este caso se separa em dois subcasos, em que o quadrado central é branco e o subcaso em que o quadrado central é azul:

A	B	A
A	B	A
A	A	A

Neste subcaso, esta é a única possibilidade possível. Para o próximo subcaso, note que devemos ter quadrados azuis abaixo de Q_1 e Q_2 e que, portanto, os três quadrados da última linha podem assumir qualquer uma das duas cores.

A	B	A
A	A	A

Assim, neste subcaso, temos $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ possibilidades. Portanto, temos um total de $64 + 8 + 1 = 73$ possibilidades.

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Vamos ver, a seguir, alguns problemas de combinatória ligados à coloração de regiões de uma figura e suas técnicas de resolução. Em geral, usaremos apenas o *Princípio da Multiplicação* ou *Princípio Fundamental da Contagem* (*PFC*), cujo enunciado recordamos: