seção

PROBLEMAS

RESPONSÁVEIS
ÉLVIA MUREB SALLUM E
ÉLIO MEGA

ENVIE SUAS SOLUÇÕES PARA RPM — PROBLEMAS
CONTATO: SBM_RPM@MPA.BR
COM O ASSUNTO RPM 103 — PROBLEMAS

As soluções dos problemas 452, 453, 454 e 455 serão corrigidas se enviadas até 31 de agosto de 2021.

452

Seja n um número natural não nulo tal que $n+1$ e $\frac{n}{2}+1$ são quadrados perfeitos. Apresente um exemplo de n tal que:

a) n tem dois algarismos;

b) n tem cinco algarismos.

453

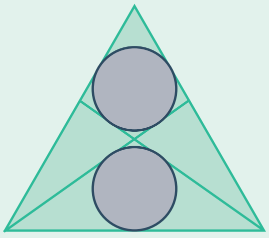
O polinômio

$$P(x) = x^{2021} - 12126x^{2020} + a_{2019}x^{2019} + \dots + a_1x + a_0$$

de coeficientes inteiros, tem 2021 raízes reais. Sabe-se que $P(7) > 1$. Prove que o polinômio P tem uma raiz maior do que 7.

454

Na figura, o triângulo equilátero possui lado 2 e as circunferências, de mesmo raio, tangenciam os segmentos e os lados como apresentado. Quanto vale o raio?



455

Encontre o número de inteiros c tais que a equação $\left|\left|20|x|-x^2\right|-c\right|=21$ tenha 12 soluções reais distintas.

ÚLTIMA VERSÃO DO PROBLEMA 434 DA RPM 101

434

Terceira versão apresentada na RPM 101.

Seja f uma função definida para todo inteiro n positivo tal que:

i) $f(1) = 1$

ii) $f(2n+1) = f(2n) + 1$

iii) $f(2n) = 3f(n)$

a) Calcule $f(2019)$.

b) Determine o conjunto imagem dessa função.

Solução:

a) Usando a definição diretamente, temos:

$f(2019) = f(2018) + 1$;

$f(2018) = 3f(1009)$;

$f(1009) = f(1008) + 1$;

$f(1008) = 3f(504)$;

$f(504) = 3f(252)$;

$f(252) = 3f(126)$;

$f(126) = 3f(63)$;

$f(63) = f(62) + 1$;

$f(62) = 3f(31)$;

$f(31) = f(30) + 1$;

$f(30) = 3f(15)$;

$f(15) = f(14) + 1$;

$f(14) = 3f(7)$;

$f(7) = f(6) + 1$;

$f(6) = 3f(3)$;

$f(3) = f(2) + 1$;

$f(2) = 3f(1)$;

Como $f(1) = 1$, temos:

$f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(6) = 12$, $f(7) = 13$, $f(14) = 39$, $f(15) = 40$, $f(30) = 120$, $f(31) = 121$, $f(62) = 363$, $f(63) = 364$, $f(126) = 1092$, $f(252) = 3276$, $f(504) = 9828$ $f(1008) = 29484$, $f(1009) = 29485$, $f(2018) = 88455$, $f(2019) = 88456$.

b) Temos, da definição da f,

$f(1) = 1$ e $f(2n) = 3f(n) \Rightarrow f(2) = 3f(1) = 3$.

Para $n > 1$, temos:

$f(2^n) = f(2 \cdot 2^{n-1}) = 3 \cdot f(2^{n-1}) = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$.

Portanto, para todo $n > 0$, temos $f(2^n) = 3^n$.

Como $f(2n+1) = f(2n) + 1$, temos:

$f(2 \cdot 2^{n+1}) = f(2 \cdot 2^{n-1}) + 1 \Leftrightarrow f(2^n + 1) = 3^n + 1$;

assim, para $n \leq m$, temos:

$f(2^n + 2^m) = f[2^n(1 + 2^{m-n})] = 3^n f(2^{m-n} + 1) =$

$= 3^n(3^{m-n} + 1) = 3^m + 3^n$.

Isso tudo sugere que f transforma uma soma de potências de 2 em uma soma de potências de 3, ou seja, transforma um número escrito na base 2 em um número escrito na base 3. Por exemplo, usando a definição repetidamente ou usando o resultado anterior sobre a soma de potências de 2, vemos que $f(6) = 12$ ou seja $f(110_2) = 110_3$.

Vamos demonstrar por indução que:

$f[(a_n \cdots a_2 a_1)_2] = (a_n \cdots a_2 a_1)_3$

tal que $a_i = 0$ ou $a_i = 1$para todo i, $0 < i \leq n$.

Temos $f(1_2) = 1_3$ pela definição. Por hipótese, pela função f, um inteiro positivo qualquer, escrito na base 2, com no máximo n algarismos, tem como imagem um número escrito na base 3, com os mesmos algarismos 0 ou 1, exatamente na mesma ordem. Seja $k = (a_{n+1} \cdots a_2 a_1)^2$. Vamos considerar dois casos:

i) $a_1 = 0$. Temos $k = (a_{n+1} \dots a_2 0)_2 = 2 \cdot (a_{n+1} \dots a_2)_2$.

Logo,

$f(k) = f[2 \cdot (a_{n+1} \dots a_2)_2] = 3 \cdot (a_{n+1} \dots a_2)_3 =$

$= (a_{n+1} \dots a_2 0)_3 = (a_{n+1} \dots a_2 a_1)_3$

ii) $a_1 = 1$. Temos $k = (a_{n+1} \dots a_2 1)_2 = 2(a_{n+1} \dots a_2) + 1$.

Logo,

$f(k) = f[2(a_{n+1} \dots a_2)_2 + 1] = 3(a_{n+1} \dots a_2)_3 + 1 =$

$= (a_{n+1} \dots a_2 0)_3 + 1 = (a_{n+1} \dots a_2 1)_3 = (a_{n+1} \dots a_2 a_1)_3$

Obs.: Com esse resultado, o item a) pode ser resolvido facilmente. O número 2019 na base 2 é escrito como 11111100011_2. Assim,

$f(2019) = f(11111100011_2) = 11111100011_3 = 88456$