



PERMUTAÇÃO CIRCULAR COM REPETIÇÃO

WALFRIDO CAMPOS

Já sabemos como uma permutação circular simples, ou seja, sem elementos repetidos, se comporta. Mas, eis que surge a curiosidade. E se tivéssemos os elementos repetidos? Por exemplo, se tivermos n_1 elementos iguais a a_1 , n_2 elementos iguais a a_2 e assim por diante, até termos n_m elementos iguais a a_m , de quantos modos distintos podemos dispor esses n elementos ($n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$) em um círculo?

Essa ingênua pergunta tem resposta bastante complexa e, para atacar o caso geral, usa-se uma técnica combinatória desenvolvida por Polya e que utiliza-se de ação de grupos. Como tal técnica foge do nosso objetivo, vamos dar uma resposta parcial ao problema seguindo as ideias abaixo.

Aparentemente, teríamos a mesma ideia da permutação linear com repetição, ou seja, teríamos a distribuição circular dividida pelo produto entre os fatoriais das quantidades dos elementos que se repetem, de acordo com a seguinte fórmula:

$$PCR_n^{n_1, n_2, \dots, n_m} = \frac{(n-1)!}{n_1! n_2! \dots n_m!}, \text{ em que PCR significa Permutação Circular com Repetição.}$$

Entretanto, vejamos o que ocorre em alguns casos particulares.

Exemplo 1: Se tivermos 3 bolas pretas (que chamaremos de P) e 2 bolas brancas (que chamaremos de B), de quantos modos distintos podemos organizá-las num círculo?

$$\text{Se a nossa suspeita estiver certa, teremos } PCR_5^{3,2} = \frac{(5-1)!}{3! 2!} = 2.$$

Sendo assim, vamos mostrar todas as permutações nesse caso:

$$(i) \text{ BBBPP} = \text{PBBBB} = \text{PPBBB} = \text{BPPBB} = \text{BBPPB}$$

$$(ii) \text{ BPBPB} = \text{BBPBP} = \text{PBBPB} = \text{BPBBP} = \text{PBPBB}$$

Verificamos que a fórmula é eficiente para esse caso. Porém, vamos ver mais uma situação.

Exemplo 2: E se agora tivermos 3 bolas pretas e 3 bolas brancas?

Nesse caso, pela fórmula, teremos $PCR_6^{3,3} = \frac{(6-1)!}{3! 3!} = \frac{10}{3}$. Ou seja, teremos um resultado que nem inteiro é.

Portanto, há algo errado ou incompleto com a fórmula proposta.

Buscando pesquisar mais sobre o assunto, tentei buscar algo na literatura mundial e, para minha surpresa, nada havia sido escrito a respeito (pelo menos não nas minhas buscas).

Então, observei uma situação inusitada, que é o caso que iremos tratar a seguir: