OLIMPÍADAS

Regis Prado Barbosa
Comissão Nacional de Olimpíadas de Matemática da SBM

Nas edições 101 e 109 da RPM apresentamos na seção de Olimpíadas problemas de algumas competições regionais e nacionais. Nesta edição, mostraremos alguns problemas de competições internacionais.

Muitas pessoas possuem a ideia errada de que existe apenas uma competição internacional de matemática, a Olimpíada Internacional de Matemática (sigla IMO, que vem do inglês International Mathematical Olympiad). Porém, existem outras competições, inclusive para alunos até 13 anos, como o nível 1 da Olimpíada de Maio. Para conhecer mais sobre as competições internacionais que o Brasil participa, recomendamos acessar a parte do site da OBM destinada para competições internacionais (https://www.obm.org.br/competicoes/internacionais/).

Cada olimpíada tem regras para participação que podem ser consultadas no site da OBM. Além das limitações de idade de algumas competições, de maneira geral, o aluno deve ser premiado na OBM do ano anterior para poder participar dessas competições.

Nesta edição apresentaremos problemas da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), da Olimpíada Ibero-americana de Matemática (OIM), da Olimpíada de Matemática do Cone Sul e da Olimpíada da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa (OMCPLP). Essas quatro competições usam o mesmo formato: dois dias de prova com 3 problemas e 4 horas e 30 minutos de duração (no caso da Cone Sul, apenas 4 horas). Os problemas 1 e 4 são considerados os mais acessíveis, os problemas 2 e 5 são considerados intermediários e os problemas 3 e 6 são considerados difíceis. Por exemplo, poucos estudantes do mundo todo conseguem fazer o problema 3 ou o problema 6 durante a IMO. Na prova da IMO 2024, que aconteceu no Reino Unido, apenas 8 alunos resolveram completamente o 3 e apenas 5 alunos resolveram completamente o 6.

Apresentaremos também problemas da Olimpíada de Maio. Nessa competição, os alunos fazem prova no próprio país e as provas são enviadas para serem comparadas com as provas de outros países. A prova tem 5 problemas e tem duração de 3 horas. Em geral, os problemas seguem a ordem crescente de dificuldade, sendo o 1 o mais acessível e o 5, o mais exigente. A Olimpíada de Maio tem dois níveis: nível 1 até 13 anos e nível 2 até 15 anos.

OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA (IMO)

(Prova de 2024 – P1)

Determine todos os números reais α tais que, para todo inteiro positivo n, o inteiro

$$\alpha + 2\alpha + \ldots + n\alpha$$

é múltiplo de n (note que z representa o maior inteiro menor que ou igual a z; por exemplo, $-\pi = -4$ e $2 = 2{,}9 = 2$).

Solução:

Vamos usar a notação

$$S_n(\alpha) = \alpha + 2\alpha + \ldots + n\alpha .$$

Vamos começar analisando $\alpha \in \mathbb{Z}$. Veja que $k\alpha = k\alpha$ e

$$S_n(\alpha) = \alpha + 2\alpha + \ldots + n\alpha = \alpha(1 + 2 + \ldots + n)$$

$$= \alpha \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n \cdot \frac{\alpha(n+1)}{2}.$$

Para que isto sempre seja múltiplo de n, o α precisa ser par. Se α ímpar e n par, o $S_n(\alpha)$ não é múltiplo de n.

A partir disso, podemos usar um truque para olhar apenas números entre -1 e 1. Veja que $S_n(\alpha)$ é múltiplo de n, se, e somente se, $S_n(\alpha + 2)$ é múltiplo de n, pois

$$S_n(\alpha + 2) = S_n(\alpha) + 2 + 4 + \ldots + 2n =$$

$$= S_n(\alpha) + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = S_n(\alpha) + n(n+1).$$

Veja que $n(n+1)$ é múltiplo de n.

Então, se o α for um real positivo maior que 1, vamos tirando de 2 em 2, até cair no intervalo entre -1 e 1. Se α for negativo menor que 1, vamos somando de 2 em 2.

Vejamos os quatro casos:

- Se $-1 \leq \alpha < -\frac{1}{2}$, então $-2 < 2\alpha < -1$ e $S_2(\alpha) = \alpha + 2\alpha = (-1) + (-2) = -3$ ímpar.
- Se $-\frac{1}{2} \leq \alpha < 0$, então $-1 \leq 2\alpha < 0$ e $S_2(\alpha) = \alpha + 2\alpha = (-1) + (-1) = -2$ par.
- Se $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, então $0 \leq 2\alpha < 1$ e $S_2(\alpha) = \alpha + 2\alpha = 0 + 0 = 0$ par.
- Se $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, então $1 \leq 2\alpha < 2$ e $S_2(\alpha) = \alpha + 2\alpha = 0 + 1 = 1$ ímpar.

Então $S_2(\alpha)$ é par quando $-\frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{1}{2}$.

Vamos provar por indução que $-\frac{1}{n} \leq \alpha < \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 2$. Vale para $n = 2$, como vimos. Suponha que vale para $n-1$ e $-\frac{1}{n-1} \leq \alpha < \frac{1}{n-1}$. Temos quatro casos:

- Se $-\frac{1}{n-1} \leq \alpha < -\frac{1}{n}$, então $-\frac{n}{n-1} < n\alpha < -1$