IDENTIDADES BINOMIAIS

JÚLIO CÉZAR MARINHO DA FONSECA – CESP – UEA

Muitos resultados interessantes podem ser obtidos contando os elementos de um conjunto de dois jeitos diferentes. Além disso, contar duas vezes pode ser uma boa estratégia de resolução de problemas, em especial, de verificação de identidades binomiais. Aqui, vamos considerar alguns problemas com os quais é possível demonstrar algumas identidades binomiais, e também será demonstrada uma identidade binomial "descoberta" a partir da solução de um problema da AIME 2022.

Sejam n, k inteiros não negativos, com $0 \leq k \leq n$, o número binomial $\binom{n}{k}$ é definido por $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Esse número calcula quantas são as escolhas não ordenadas de k elementos dentre n elementos distintos fornecidos.

PROBLEMA 1 – COMBINAÇÕES COMPLEMENTARES

Verifique que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

A identidade é imediata da definição de número binomial. De outro modo, poderíamos ter argumentado que dentre n pessoas, escolher um comitê com k membros é equivalente a escolher $n - k$ pessoas que ficaram de fora do comitê.

PROBLEMA 2

Dado um conjunto de n pessoas, de quantas maneiras podemos formar um comitê de k pessoas com um presidente?

Podemos escolher os k membros do comitê de $\binom{n}{k}$ maneiras e podemos escolher o presidente então de k maneiras, de modo que a resposta é $k\binom{n}{k}$. Por outro lado, podemos primeiro escolher o presidente (isso pode ser feito de n maneiras) e em seguida escolher os próximos $k - 1$ membros restantes entre as $n - 1$ pessoas, levando a um total de $n\binom{n-1}{k-1}$ possibilidades. E, assim, obtemos a seguinte identidade:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$