EXTENSÃO DO PROBLEMA DO MACARRÃO A QUADRILÁTEROS

Adolfo Luiz Braucks Vianna

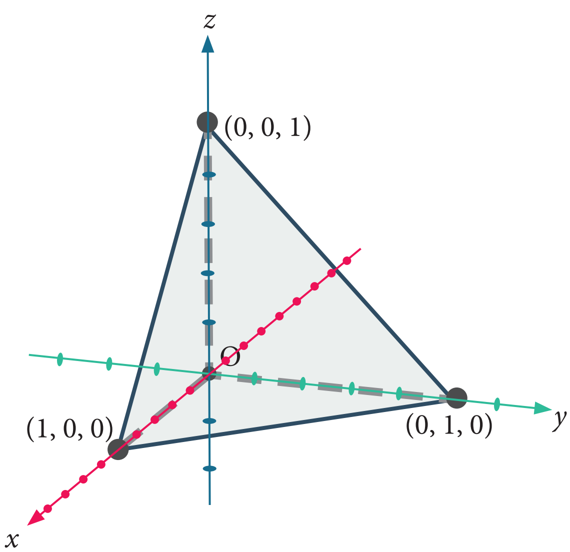
A motivação para este artigo se originou de voltarmos a nos debruçar sobre o fascinante tópico do cálculo de probabilidades sob enfoques de cunho geométrico, ou simplesmente "Probabilidade Geométrica". Especificamente na edição de número 34 da RPM, fomos brindados com um ótimo artigo no qual o professor Eduardo Wagner abordou o assunto por meio de um de seus mais conhecidos exercícios, o clássico "Problema do Macarrão", que consiste em calcular a probabilidade de que seja possível construir um triângulo tendo como lados os três segmentos de reta em que fica dividido um segmento inicial, a partir de sua partição por dois pontos aleatoriamente escolhidos em seu interior.

Ao terminarmos sua leitura, refletimos sobre uma questão: e se, ao invés de "quebrar o macarrão" (em seu artigo o professor Wagner menciona um "espaguete") em três pedaços, mudássemos ligeiramente o processo, acrescentando um terceiro ponto de quebra aos dois supracitados? Evidentemente obter-se-ia, nesse novo cenário, não mais três, e sim quatro pedaços de macarrão. Voltando à necessária abstração da situação, qual é agora a probabilidade de que se possa formar um quadrilátero, tendo por lados os quatro segmentos de reta que surgem, quando se particiona um segmento de reta inicial unitário por meio de três pontos, escolhidos de forma inteiramente arbitrária?

A análise desse quadro leva ao raciocínio de que, uma vez que se trata agora da escolha de três pontos aleatórios no interior de um segmento de reta unitário, é preciso trabalhar com três variáveis, e não com duas como no caso anterior: com efeito, haverá nesse novo cenário quatro pedaços, de comprimentos

x, y, z e $1 - x - y - z$. A figura ilustra a divisão do segmento unitário, pela escolha aleatória de três pontos em seu interior.

Portanto, fazendo dos números reais x, y e z coordenadas cartesianas no espaço tridimensional, lidamos, ao quebrar o segmento AB em quatro pedaços, com todos os ternos ordenados (x, y, z) tais que $x, y, z > 0$ e $1 - x - y - z > 0 \Rightarrow x + y + z < 1$ (as equações de quatro planos do espaço cartesiano), isto é, com os pontos pertencentes ao tetraedro trirretângulo (cujas faces correspondem aos planos destacados acima) a seguir:



Ora, para que seja viável formar quadrilátero de lados AM, MN, NP e PB, é preciso que cada um desses lados seja menor que a soma dos outros três, ou seja, que os quatro segmentos de reta, em que se divide o segmento original unitário AB, tenham por medidas números reais menores que a metade do comprimento daquele segmento:

$$x, y, z, 1 - x - y - z < \tfrac{1}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x, y, z < \tfrac{1}{2} \wedge \tfrac{1}{2} < x + y + z$$

Assim, os ternos ordenados (x, y, z) que atendem às condições para a existência de quadriláteros de lados medindo x, y, z e $1 - x - y - z$ estão na região delimitada pelo octaedro amarelo nas figuras a seguir. Optamos por exibir tal configuração espacial em três ângulos de visada diferentes, para facilitar seu completo entendimento pelo leitor.