Em classe

Uma pergunta durante uma aula on-line

Carlos Alberto M. de Assis – UNESA/RJ
Rede Estadual de Educação – RJ

No transcorrer de uma aula de forma on-line, estava fazendo uma revisão sobre Trigonometria no triângulo retângulo para os meus alunos do Ensino Médio. Estava resolvendo com eles alguns problemas que envolviam o conteúdo supracitado.

Porém, no decorrer da aula, uma situação intrigante apareceu. Um aluno, acredito eu, inspirado com as resoluções desses problemas, interpelou-me:

— Professor, uma pergunta? Se eu considerar que o ângulo sob o qual um observador (no plano horizontal) vê o topo de um prédio dobra quando ele se aproxima x metros e quadruplica quando se aproxima mais y metros, e desprezar a altura do observador, é possível encontrar a altura desse prédio em função de x e y?

No entanto, naquele momento, disse que não saberia responder à sua indagação, mas prometi pesquisar sobre o assunto e que retornaríamos a conversa no próximo encontro, pois a aula virtual já estava se encerrando.

Após rascunhar alguns cálculos, encontrei uma fórmula que permitiria calcular a altura do prédio em função das incógnitas mencionadas.

Sendo assim, na aula seguinte, disse para o aluno que teríamos que revisitar alguns tópicos essenciais, que foram estudados anteriormente. Isto é,

a) a lei dos senos,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(A)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(B)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(C)};$$

b) as identidades trigonométricas,

$$\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta) = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

e, $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$;

c) e, por último, uma outra identidade,

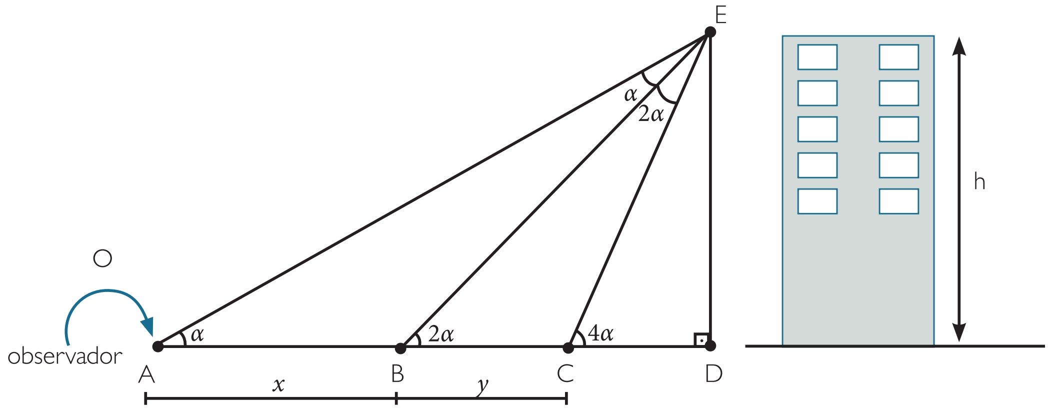
$\operatorname{sen}(3\alpha) = 3\operatorname{sen}(\alpha) - 4\operatorname{sen}^3(\alpha)$.

Depois de relembrarmos tais tópicos, perguntei para o aluno curioso:

– Vamos aos cálculos?

– Sim, vamos – respondeu ele.

Mencionei que considerasse a figura a seguir, construída obedecendo as informações.



O ponto de partida é observar inicialmente que o ΔABE é isósceles, implicando com isso que $\overline{BE} = x$. Perceba que o ΔBCE também é isósceles e que a lei dos senos atribuída nesse mesmo Δ irá nos fornecer $\dfrac{x}{\operatorname{sen}(180^\circ - 4\alpha)} = \dfrac{y}{\operatorname{sen}(2\alpha)}$, ou melhor dizendo, $\dfrac{x}{\operatorname{sen}(4\alpha)} = \dfrac{y}{\operatorname{sen}(2\alpha)}$. Desta igualdade, podemos obter $\dfrac{x+y}{\operatorname{sen}(4\alpha)+\operatorname{sen}(2\alpha)} = \dfrac{y}{\operatorname{sen}(2\alpha)}$ (*), e que, utilizando as identidades trigonométricas do item (b), nos seus lados, acarretarão em $\dfrac{x+y}{2\operatorname{sen}(3\alpha)\cos(\alpha)} = \dfrac{y}{2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)}$. Por fim, substituindo a identidade do item (c), no lado esquerdo desta última igualdade, obteremos $\operatorname{sen}^2(\alpha) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4y}$, ou seja, $\operatorname{sen}(\alpha) = \sqrt{\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4y}}$. Consequentemente, usando a relação fundamental da Trigonometria, ficaremos com $\cos(\alpha) = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4y}}$.

Note que, do ΔBED, teremos $\overline{ED} = \overline{EB} \cdot \operatorname{sen}(2\alpha)$, ou melhor, $h = 2x\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$. Agora, fazendo a substituição das expressões algébricas que estão no lado direito do sen(α) e do cos(α) nesta última igualdade encontrada acima, acompanhada de alguns manejos algébricos, a altura em função das incógnitas sugeridas será igual a $h = \sqrt{x^2 - \dfrac{x^4}{4y^2}}$.

Novamente, perguntei para o aluno:

– Não é interessante?

Ele, surpreso, respondeu:

– Sensacional!

Aproveitando a emoção por ter respondido à sua pergunta, nós nos tornarmos parceiros nas aulas on-line!

(*) Executando do modo

$$\frac{x-y}{\operatorname{sen}(4\alpha)-\operatorname{sen}(2\alpha)} = \frac{y}{\operatorname{sen}(2\alpha)}$$

e usando as identidades

$$\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta) = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

e $\cos(3\alpha) = 4 \cdot \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$, chegaremos na mesma resposta.

CE da RPM: vale destacar que existem outras soluções para o problema, mas a solução aqui apresentada é interessante e mostra uma forma criativa de usar identidades trigonométricas. Vamos resumir outra solução usando o Teorema de Pitágoras. Chamando $CD = z$ e usando os triângulos isósceles ABE e BCE, temos $h^2 = y^2 - z^2$ e $h^2 = x^2 - (y+z)^2$. Igualando as expressões de h^2, temos $x^2 - (y+z)^2 = y^2 - z^2 \Leftrightarrow z = \dfrac{x^2}{2y} - y$. Substituindo z na primeira equação, chegamos novamente em $h = \sqrt{x^2 - \dfrac{x^4}{4y^2}}$.