artigo

DESENHANDO ESTRELAS

Florêncio Ferreira Guimarães Filho – UFES
Moacir Rosado Filho – UFES

Todo mundo, quando pequeno, já tentou e acabou aprendendo a traçar uma estrela de 5 pontas, sem tirar o lápis do papel. E como traçar estrelas de 4, 6, 7, ... pontas, também sem tirar o lápis do papel?

Por traçar uma estrela dessa forma, queremos dizer o seguinte: dados $n \geq 4$ pontos, P_0, P_1, P_2, ..., P_{n-1}, igualmente espaçados ao longo de uma circunferência, traçar uma estrela com esses pontos como pontas da estrela significa, para algum número inteiro a, com $2 \leq a \leq n - 2$, traçar a linha poligonal fechada (sem tirar o lápis do papel) $P_{r_0}P_{r_1}P_{r_2}...P_{r_{n-1}}$, sendo r_j igual ao resto de ja por n, com $0 \leq j \leq n - 1$, de modo que $\{P_{r_0}, P_{r_1}, P_{r_2}, ..., P_{r_{n-1}}\} = \{P_0, P_1, P_2, ..., P_{n-1}\}$, resultando assim em uma estrela $P_{r_0}P_{r_1}P_{r_2}...P_{r_{n-1}}$. Na linguagem de congruência de inteiros, módulo n, o número inteiro r_j é o resíduo de ja módulo n, ou seja, r_j é o único inteiro x, com $0 \leq x \leq n - 1$, tal que $ja \equiv x (\text{mod } n)$. Observe-se que $P_{r_0} = P_0$ e $P_{r_1} = P_a$, pois $r_0 = 0$ e $r_1 = a$, qualquer que seja o valor de a (os restos das divisões de $0 \cdot a = 0$ e $1 \cdot a = a$ por n são iguais a 0 e a, respectivamente). Excluímos os casos de $a = 1$ e $a = n - 1$ porque a estrela não deve ligar pontos adjacentes. Isso significa que não consideramos polígono regular com sendo uma estrela.

Por exemplo, para $n = 5$ e $a = 2$, a linha poligonal fechada correspondente é a estrela $P_{r_0}P_{r_1}P_{r_2}P_{r_3}P_{r_4} = P_0P_2P_4P_1P_3$, uma vez que $r_0 = 0$, $r_1 = 2$, $r_2 = 4$, $r_3 = 1$ e $r_4 = 3$ (os restos das divisões de $2a = 2 \cdot 2 = 4$, $3a = 3 \cdot 2 = 6$ e $4a = 4 \cdot 2 = 8$ por 5 são 4, 1 e 3, respectivamente). Isso resulta na tradicional estrela de 5 pontas da Figura 1.

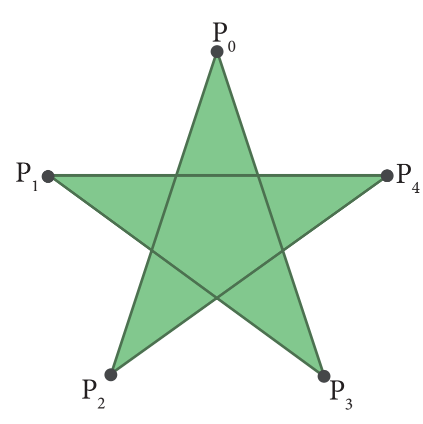

Figura 1: $n = 5$; $a = 2$ ou $a = 3$