A RAZÃO DE PRATA

João Luzeilton de Oliveira - UECE[1]

INTRODUÇÃO

É comum ouvirmos falar do número $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, conhecido como razão de ouro (número de ouro ou razão áurea), e de sua relação com o retângulo de ouro (retângulo áureo), bem como de sua relação com a Natureza e algumas áreas do conhecimento humano, como Engenharia, Arquitetura, Design, Música, Arte Renascentista e Cinema, por exemplo, emprestando harmonia e beleza a essas áreas ([1], [2], [5], [6], [7] e [9]). A razão de ouro tem uma estreita relação com a sequência definida pela recorrência $f_0 = 1, f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, chamada *sequência de Fibonacci*: $\varphi = \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$ ([1]).

Outro número, também de grande importância e que tem conexões com outros elementos da própria Matemática e com a Arquitetura Romana, por exemplo, é o número $1+\sqrt{2}$, conhecido pelos romanos desde os séculos I e II ([3] e [4]) e que, juntamente com o número $\sqrt{2}$, foi usado como base de um sistema de proporções na Arquitetura Romana. A divisão de segmentos (seccionados por um ponto) era feita de tal maneira que a razão entre o segmento inteiro e uma das partes dessa divisão

[1]Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central, FECLESC, da Universidade Estadual do Ceará, UECE. E-mail do autor: joao.luzeilton@uece.br.

tinha como resultado o número $1+\sqrt{2}$ ou algum número que tivesse relação com o mesmo. Isto fazia com que tal sistema fosse baseado em proporções, cujas partes se encaixavam formando um todo e, ao mesmo tempo, satisfazendo padrões matemáticos, padrões de estética e beleza, trazendo harmonia a essas proporções. A partir de agora, usando a notação $\delta = 1+\sqrt{2}$, vamos nos referir ao número $1+\sqrt{2}$ como δ e ao seu inverso como $\delta^{-1} = \sqrt{2}-1$.

Existe em Matemática uma classe de números irracionais positivos que contém os números φ e δ; essa classe é constituída pelos números da forma

$$\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2} \quad (1)$$

e que são raízes da equação $x^2 - nx - 1 = 0$, com n inteiro positivo.

Ao número δ foi dado um tratamento do ponto de vista do Design, mostrando a sua importância para a Matemática, através de suas propriedades, bem como a possibilidade de aplicação em outras áreas. Em 1998, Vera Martha Winitzky de Spinadel (matemática argentina, 1929-2017) ([9] e [10]) introduz sua *Metallic Means Family*, onde faz um excelente trabalho de generalização da expressão em (1), obtendo uma expressão geral que dá origem aos chamados *números metálicos*. Nessa família, o primeiro membro é a razão de ouro φ e o segundo, o número δ. Em seu trabalho, ao generalizar a sequência de Fibonacci e, consequentemente, a razão de ouro, Spinadel obteve uma família de números positivos da forma

$$\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2} \quad (2)$$

e que são raízes da equação $x^2 - px - q = 0$, com p e q inteiros positivos.

Os números em (2) foram chamados por Spinadel de *números metálicos*. Quando $p = n$ e $p = 1$, a expressão (2) coincide com a expressão (1); ainda, em (1), com $n = 1$ e $n = 2$, tem-se, respectivamente, os números $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (número de ouro) e $\delta = \frac{2+\sqrt{8}}{2}$ ou , batizado por Spinadel como *número de prata* (ou *razão de prata*), em alusão ao número de ouro.

Assim como a razão de ouro, que tem relação com a sequência de Fibonacci, o número de prata (a partir de agora o trataremos como razão de prata) tem relação com a *sequência de Pell*, que é uma sequência definida pela recorrência $p_0 = 1$, $p_1 = 2$ e $p_n = p_{n-2} + 2p_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Os números 1, 2, 5, 12, 29, 70, ... são seus termos e são chamados *números de Pell* (matemático inglês, 1611-1685). Essa relação, como veremos mais adiante, será dada por $\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_{n-1}}$.

Na próxima seção definiremos formalmente a razão de prata e o retângulo de prata ([8]), mostrando as relações que os envolvem. Em seguida, construiremos, geometricamente, a razão e o retângulo de prata.

A RAZÃO DE PRATA E O RETÂNGULO DE PRATA

Se os pontos C e D sobre um segmento de reta AB são tais que $AC = CD >$ DB e

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DB}{AC}, \quad (3)$$

então $\frac{AB}{AC}$ é chamada *razão de prata*.

Fig. 1. Segmento de prata