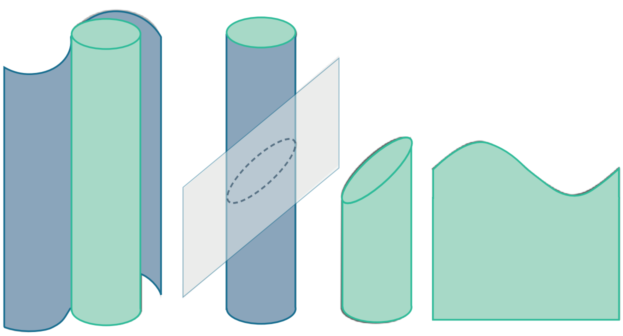
A ELIPSE É UMA ONDA

Rui Lima

INTRODUÇÃO

Quando enrolamos uma folha de papel retangular num cilindro circular reto e, em seguida, o seccionamos obliquamente, obtemos no cilindro uma elipse e na folha de papel, quando desenrolada, uma onda senoidal.



A elipse é o conjunto de pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2, chamados focos, é constante e maior que a distância entre F_1 e F_2. Considerando, num plano cartesiano $x0y$, os focos $F_1(c; 0)$ e $F_2(-c; 0)$ e $2a$ a soma das distâncias de um ponto $P(x, y)$ da elipse aos focos, com a e c reais positivos, tais que $a > c$, temos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ com } a \text{ e } b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

A onda senoidal é a representação gráfica do deslocamento y em função da posição x na dimensão em que a onda se propaga, definida por

$y = A \cdot sen\,(\omega \cdot x + \varphi_0)$,

com x e y medidos em cm, em que

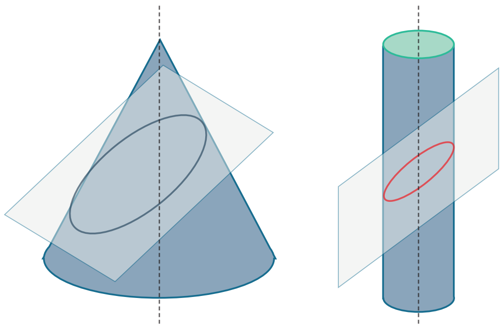
- A, número real, é a amplitude da onda, medida em cm;

- ω é a velocidade angular, medida em radianos por segundo; e

- φ_0 é a constante de fase, medida em radianos, que caracteriza as condições iniciais.

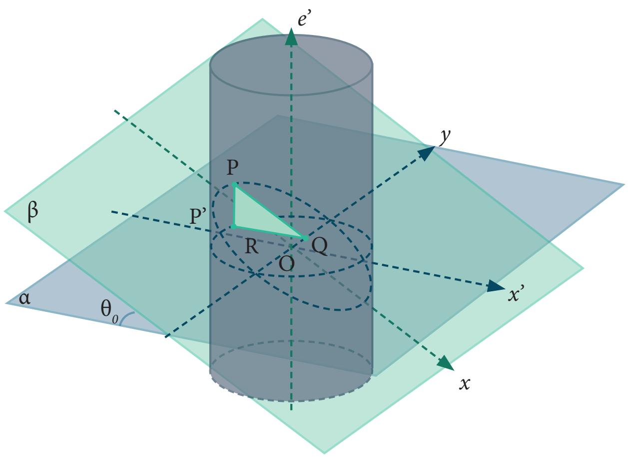
Um fato interessante é que, quando obtemos uma elipse como secção de uma superfície cilíndrica circular, existe uma correspondência entre os pontos dessas duas curvas.

A elipse é uma secção cônica, visto que pode ser obtida pela interseção entre a superfície lateral de um cone circular reto e um plano oblíquo ao eixo do cone, mas também pode ser obtida, da mesma forma, num cilindro circular reto, como mostraremos a seguir.

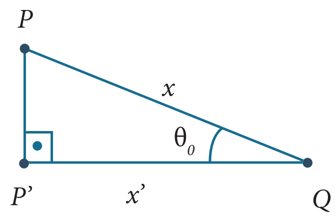


ELIPSE COMO SECÇÃO DE UM CILINDRO CIRCULAR

Considere uma superfície cilíndrica circular de raio R, altura H e eixo e, os planos secantes α e β perpendiculares e oblíquos ao eixo e, respectivamente, θ_0 o ângulo agudo formado por α e β e os sistemas cartesianos bidimensionais $x0y$, em β, e $x'0y$, em α, como mostrado na figura abaixo.



Sendo $P(x; y)$ um ponto qualquer da interseção entre o plano do plano β e a superfície cilíndrica, $P'(x'; y)$ a projeção ortogonal sobre o plano α e $Q(0; y)$ projeção ortogonal de P o eixo y, no triângulo $PP'Q$, retângulo em P, temos $x' = x \cdot \cos\theta_0$.



A interseção do plano α com a superfície cilíndrica é uma circunferência de equação $(x')^2 + y^2 = R^2$, no plano cartesiano $x'0y$, mas $x', = x \cdot cos(\theta_0)$, portanto

$$\left(x \cdot \cos\theta_0\right)^2 + y^2 = R^2$$

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{R}{\cos\theta_0}\right)^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$$

que representa a equação de uma elipse no plano cartesiano $x0y$.

TRANSFORMANDO A ELIPSE NUMA ONDA SENOIDAL

Planificando a superfície cilíndrica de raio R e altura H obtemos um retângulo, de dimensões $2\pi R$ e H. Representando este retângulo num plano cartesiano com origem K e eixos ℓ e h, em que K é um dos pontos de interseção da superfície cilíndrica com o eixo y, o eixo ℓ está associado ao comprimento do arco $P'K$ e o eixo h à medida do segmento PP', e encontramos $h = x \cdot sen\theta \cdot 0$ no triângulo $PP'Q$.