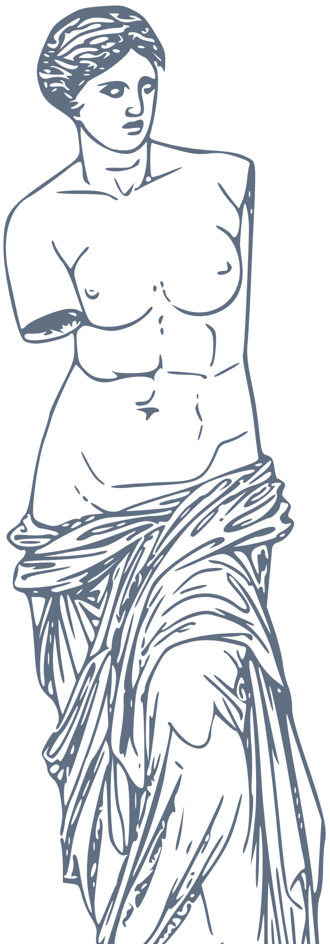
A VÊNUS DE MILO

Vagner Figueira de Faria[1] – UNESP
Érika Capelato[2] – UNESP



Começamos este texto com um poema no qual o escritor, sabiamente, recorre à formulação matemática para se expressar:

> O Binômio de Newton é tão belo como a Vênus de Milo.
> O que há é pouca gente para dar por isso.
> óóóó – óóóóóóóóó – óóóóóóóóóóóóóóó.
>
> Álvaro de Campos, **O vento lá fora**. 15-1-1928.

Motivados pela beleza metafísica que o poeta enxergou e depois registrou nessas poucas linhas, nosso objetivo é explorar a beleza da matemática contida no binômio de Newton.

---

[1] Mestre em Matemática pela Unesp, professor do curso EAD Kuadro, do Anglo Bragança e do Anglo Atibaia, Brasil. E-mail: vagner_figueira@hotmail.com.

[2] Doutora em Matemática pela UFSCar, professora no Departamento de Economia da Faculdade de Ciências e Letras, Unesp, *campus* Araraquara, Brasil. E-mail: erika.capelato@unesp.br.

Primeiramente, para a e b números reais quaisquer, considere o seguinte binômio de Newton:

$$(a+b)^4 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) \quad (1)$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação do lado direito da igualdade, obtemos (2):

$$(a+b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4$$

se a ou b é zero, 0^0 será interpretado como igual a 1.

Podemos observar da expressão (2) que, à medida que os expoentes de b decrescem, os expoentes de a crescem. Porém, a pergunta natural a ser feita é: de onde vêm os *coeficientes binomiais* 1, 4, 6, 4 e 1?

Vamos responder a esta pergunta observando o coeficiente 6, do termo a^2b^2.

Do lado direito da igualdade na expressão (1) observamos que existem quatro fatores multiplicativos. No que segue, escrevemos todas as maneiras de escolher a em cada um destes fatores multiplicativos, de forma que, ao multiplicarmos esses elementos que escolhemos tenhamos o termo a^2b^2.

$$a\cdot a\cdot b\cdot b = a^2b^2$$

$$a\cdot b\cdot a\cdot b = a^2b^2$$

$$b\cdot a\cdot b\cdot a = a^2b^2$$

$$a\cdot b\cdot b\cdot a = a^2b^2$$

$$b\cdot a\cdot a\cdot b = a^2b^2$$

$$b\cdot b\cdot a\cdot a = a^2b^2$$

Observe que existem 6 maneiras de fazer essa escolha, ou seja, em termos de combinação, é o número de maneiras de se escolher dois elementos no universo dos quatro fatores. Este número é denotado por $\binom{4}{2}$ e seu valor é:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

Prosseguindo desta forma, podemos explicar cada um dos coeficientes binomiais que aparecem na expressão (2). Assim, esta é equivalente à expressão:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4 \quad (3)$$

Outra pergunta natural a ser feita é: para a e b, números reais quaisquer, como seria a expansão do binômio de Newton $(a+b)^n$ para todos os inteiros $n \geq 0$? A resposta a esta pergunta é o conhecido *teorema binomial*, cujo enunciado apresentamos abaixo:

Teorema Binomial: Para todos os inteiros $n \geq 0$ e a, b números reais quaisquer temos (4):

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}a^0b^n$$

Algumas demonstrações interessantes desse teorema podem ser lidas em Hwang (2009) e Rosalsky (2007).

Fixando a e b números reais quaisquer (não ambos nulos) e variando os inteiros $n \geq 0$, podemos organizar os coeficientes binomiais da seguinte maneira: na linha zero o coeficiente do binômio $(a+b)^0$, na linha um, os coeficientes de $(a+b)^1$, na linha dois, os coeficientes de $(a+b)^2$ e assim sucessivamente. Veja essa organização na Figura 1.

O resultado é o conhecido *Triângulo Aritmético* (ou *Triângulo de Pascal*). A beleza das propriedades