DELTAEDROS CONVEXOS: ESTUDO PARA UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA INVESTIGATIVA

ROBERTO RIBEIRO PATERLINI – UFSCar

É bastante comum lermos nos livros de Matemática do Ensino Médio sobre os poliedros de Platão. Vemos que são cinco, e os livros geralmente apresentam seus desenhos. Em [4], a partir da pág. 240, temos um estudo sobre esses sólidos.

Mais raramente, lemos sobre os poliedros semirregulares, ou de Arquimedes, que são em número de 13. Em [6], a partir da página 55, os autores constroem esses poliedros.

Em geral, os poliedros convexos com faces regulares podem ser classificados nas seguintes famílias: (a) os cinco sólidos de Platão (poliedros regulares); (b) os treze sólidos de Arquimedes (poliedros semirregulares); (c) os prismas com faces regulares (existem infinitos); (d) os anti-prismas com faces regulares (existem infinitos); (e) o restante, os 92 sólidos de Johnson.

Norman W. Johnson elaborou uma lista de 92 sólidos em 1966. Victor A. Zalgaller que não existem outros, além dos citados acima. Para ver a lista completa dos 92 sólidos de Johnson e as referências relativas a eles consulte [7].

Tratar no Ensino Médio de todos os poliedros convexos com faces regulares seria difícil, devido à complexidade do assunto. Mas certas subfamílias podem eventualmente serem abordadas nas aulas de Geometria Espacial.

Neste trabalho, vamos construir a lista dos **deltaedros convexos**, que são os poliedros cujas faces são triângulos equiláteros. Usaremos modelos e propriedades combinatórias. Sugerimos que o leitor acompanhe este texto construindo os modelos dos sólidos. Para isso, precisa dispor de uma boa quantidade de recortes de triângulos equiláteros, com lados de mesma medida, ou de folhas de papel para desenhar e recortar as possíveis planificações. O Geogebra também pode ser usado para facilitar o desenho de planificações.

Em particular, o professor que nos lê poderá criar, para seus alunos, sequências didáticas investigativas que dependem de poucas técnicas. Encontrará aqui as propriedades e as ideias necessárias.

O MENOR DELTAEDRO

Dispondo de recortes de triângulos equiláteros (com lados de mesma medida), qual é a menor quantidade de que precisamos para formar o primeiro deltaedro? Bem, nosso poliedro precisa ter um vértice, e a este vértice precisam concorrer pelo menos três faces (ou três arestas). Montando um vértice com três peças, vemos que a parte vazia que sobra pode ser preenchida com mais uma peça. Portanto, a quantidade mínima de faces é quatro.

Obtemos assim nosso primeiro deltaedro, e vemos que se trata do sólido de Platão denominado tetraedro regular. Os dados desse sólido estão na linha 1 da tabela no fim deste artigo, em que veremos uma das duas possíveis planificações.

A seguir, uma explicação sobre as notações da tabela. Indicamos a quantidade de faces por F, a de arestas por A e a de vértices por V. A um vértice podem concorrer quantidades diferentes de faces. Indicamos por V_p a quantidade de vértices ao qual concorrem p faces (ou p arestas). Já entendemos que o menor valor de p é 3. Sabemos ainda que a soma das medidas dos ângulos contíguos ao vértice precisa ser $< 360°$ (caso contrário, o poliedro será plano nesse vértice ou será não convexo). Como o ângulo de um triângulo equilátero mede 60°, a quantidade máxima de faces contíguas a um vértice é cinco. Temos assim a fórmula

$$V = V_3 + V_4 + V_5 \quad (1)$$

Existem outros deltaedros que podem ser formados com quatro triângulos equiláteros? Dispondo de quatro faces, observamos que não podemos formar um vértice do tipo V_4, pois não sobrariam peças para preencher o restante. Tampouco o tipo V_5 é possível. Assim, só podemos começar a montagem do modelo com um vértice do tipo V_3, e a quarta peça terá necessariamente que ser usada para fechar o sólido. Portanto, existe apenas um poliedro que pode ser fabricado com quatro peças. Temos assim a

> **P1** *Com quatro triângulos equiláteros, podemos formar um único deltaedro, e essa é a menor quantidade de triângulos que pode ser usada. O deltaedro formado é o tetraedro regular.*

PROSSEGUINDO COM A INVESTIGAÇÃO

Investigamos agora se podemos formar deltaedros com cinco triângulos equiláteros. Por mais que tentemos construir um modelo, vemos que não é possível. Para nos convercermos disso, notemos que podemos formar um vértice do tipo V_5, mas não sobrarão peças para fechar o sólido. Podemos começar com um vértice do tipo V_4. Depois de montar as quatro peças, vemos que a parte que falta é um quadrilátero equilátero maleável. Se os ângulos desse quadrilátero forem retos, trata-se de um quadrado, o que não interessa aqui. Se os ângulos não forem retos, teremos um losango não plano. De qualquer forma, não será possível fechar o sólido com a única peça restante. Portanto, precisaremos começar o modelo com um vértice do tipo V_3, e não teremos como combinar as duas peças restantes.

Uma outra forma de nos convencermos de que não é possível formar um deltaedro com cinco peças é estudar certas propriedades combinatórias dos poliedros. Lembrando que um triângulo tem três arestas, cinco faces fornecem, a princípio, $3F = 3 \cdot 5 = 15$ arestas. Mas, ao juntar essas faces para formar o poliedro, cada aresta se combina com exatamente uma outra, de modo que temos $A = 3F/2 = 15/2$ arestas. Mas isso é impossível, pois a quantidade de arestas é um número inteiro.