TEOREMA DE BINET

REGIS PRADO BARBOSA
COMISSÃO DE OLIMPÍADAS DA SBM

O Teorema de Binet afirma que, para quaisquer duas matrizes A e B quadradas de ordem n, $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$. Um leitor da RPM perguntou sobre a demonstração do Teorema de Binet utilizando matrizes triangulares. Vamos estudar essa demonstração em detalhe. Usaremos como exemplo matrizes quadradas de ordem 3, mas as mesmas ideias podem ser adaptadas para matrizes de qualquer ordem.

O Teorema de Binet segue direto para matrizes triangulares da multiplicação, pois

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & w & t \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & b' & c' \\ 0 & dw & e' \\ 0 & 0 & fu \end{bmatrix}$$

e $(adf)(xwu) = ax \cdot dw \cdot fu$.

Porém, para quaisquer matrizes quadradas A e B, precisamos encontrar matrizes triangulares A' e B' com os mesmos determinantes. Para isso, usaremos – sem demonstração – o Teorema de Jacobi que afirma que, ao adicionar em uma fila um múltiplo de outra fila paralela, o determinante não se altera. Suponha que

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Um fato que utilizaremos na demonstração é que executar operações elementares sobre as linhas de uma matriz é equivalente a multiplicá-la, à esquerda, por uma matriz apropriada. Por exemplo, somar à segunda linha de A o dobro da primeira linha é o mesmo que multiplicar A à esquerda por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontraremos a matriz A' triangular com o mesmo determinante que A, operando nas linhas, usando linhas paralelas. Se $a = 0$ e todos os números abaixo na primeira coluna forem 0, então, passamos para a segunda coluna. Se houver algum número diferente de zero, abaixo do a, multiplicaremos uma matriz Y1 à esquerda, para somar esse valor não nulo na posição do a. Por exemplo, no caso $d \neq 0$ então, podemos usar

$$Y_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Agora temos $a \neq 0$. Então podemos multiplicar A à esquerda por X_1, de modo que

$$X_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -d/a & 1 & 0 \\ -g/a & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & x & y \\ 0 & z & w \end{bmatrix} = A_1$$

Poderemos repetir o processo para a segunda coluna. Com $x \neq 0$, temos

$$X_2 \cdot A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -z/x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & x & y \\ 0 & z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} = A_2$$

Concluímos que existe uma matriz

$$X_A = X_2 \cdot Y_2 \cdot X_1 \cdot Y_1$$

(quando uma dessas passagens não for necessária, basta usar a matriz identidade), tal que $X_A \cdot A$ é triangular e possui o mesmo determinante que A, pelo Teorema de Jacobi.

É importante ressaltar que, pelo Teorema de Jacobi, para qualquer matriz M, de mesma ordem que A, a matriz $X_A \cdot M$ tem o mesmo determinante que M, já que, por construção, é obtida a partir de M somando múltiplos de filas a filas paralelas.

Façamos um exemplo prático. Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

então $Y_1 = \mathrm{I}$ e

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Isso nos leva a

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos tomar

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$