O USO DOS CÍRCULOS DE FORD NA CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS RACIONAIS

GEORGE DA COSTA EUZÉBIO

INTRODUÇÃO

O conjunto dos números racionais, no ensino fundamental e médio, é inicialmente apresentado como sendo o conjunto de todas as frações. Em geral, somente depois de aprender a transformar frações em numerais decimais, é que os alunos enfrentam o desafio de localizar números racionais na reta numérica. Por exemplo, à fração $3/4$ é associado o decimal $0{,}75$, e como $0 < 0{,}75 < 1$, essa fração é apresentada de uma forma aproximada como um ponto entre os pontos da reta que representam os números 0 e 1.

É possível que os alunos aprendam a localizar frações na reta de uma forma mais precisa, usando o denominador para dividir os intervalos unitários, e o numerador para contar as divisões, mas esse método é algo enfadonho. É o caso de perguntar, portanto, se existem outros métodos para localizar geometricamente os números racionais na reta.

Para responder a esse questionamento, mostraremos uma construção geométrica dos números racionais sobre a reta numérica que utiliza frações em vez de decimais. Para isso, apresentaremos sequências de frações próprias (isto é, de valores entre 0 e 1), chamadas **sequências de Farey**, criadas pelo geólogo inglês John Farey.

SEQUÊNCIAS DE FAREY

A sequência de Farey de ordem n é obtida de forma recursiva, trabalhando-se apenas com frações próprias, na qual cada linha i é representada por F_i, para $1 \leq i \leq n$. A construção das linhas é feita da seguinte maneira: na primeira linha, ou seja $i = 1$, escrevemos as frações 0/1 e 1/1. Para $i = 2, 3, \ldots$, usamos a seguinte regra: para a i-ésima linha da tabela, escrevemos a $(i - 1)$-ésima linha, mas inserindo as frações medianas $(a + c)/(b + d)$ entre as frações a/b e c/d, sempre que $b + d \leq i$. Na figura abaixo, mostraremos a sequência de Farey de ordem 7, obtida a partir das sequências F_i, $1 \leq i < 7$.

$$F_1 \quad \frac{0}{1}\ \frac{1}{1}$$

$$F_2 \quad \frac{0}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{1}$$

$$F_3 \quad \frac{0}{1}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{1}$$

$$F_4 \quad \frac{0}{1}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{1}$$

$$F_5 \quad \frac{0}{1}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{1}$$

$$F_6 \quad \frac{0}{1}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{1}{1}$$

$$F_7 \quad \frac{0}{1}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{6}{7}\ \frac{1}{1}$$

Essas sequências possuem algumas propriedades interessantes, listadas nos resultados que apresentaremos abaixo.

Teorema 1. Se a/b, c/d são frações consecutivas de F_n, então $bc - ad = 1$

Demonstração. Para $n = 1$, temos $1 \times 1 - 0 \times 1 = 0$. Vamos supor que a afirmação seja verdadeira para a $(n - 1)$-ésima linha. Qualquer par de frações consecutivas da n-ésima linha é uma das opções a/b, c/d ou a/b, $(a + c)/(b + d)$ ou $(a + c)/(b + d)$, c/d, em que a/b e c/d são frações consecutivas da $(n - 1)$-ésima linha.

Como $bc - ad = 1$, temos $b(a + c) - a(b + d) = bc - ad = 1$, assim como $c(b + d) - d(a + c) = bc - ad = 1$. O que concretiza a prova por indução.

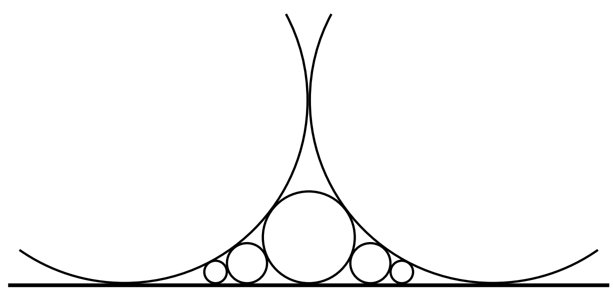
Corolário 1. Cada $a/b \in F_n$ é uma fração irredutível, ou seja, $mdc(a, b) = 1$.

Corolário 2. As frações de cada linha F_n estão dispostas em ordem de valor crescente.

CÍRCULOS DE FORD

Os círculos de Ford são criados a partir da escolha de dois inteiros p, q primos entre si, de modo que cada círculo, que denotaremos por $C(p, q)$, associado a esses dois inteiros, tem raio igual a $1/2q^2$ e centro no ponto $(p/q, 1/2q^2)$.

Os círculos assim definidos são tangentes ao eixo das abcissas, e a figura abaixo apresenta uma sequência de círculos de Ford, na qual os círculos são tangentes entre si. Podemos observar na imagem que também há círculos que não se tangenciam, portanto, necessitamos de um critério que nos permita distinguir quais círculos dizem respeito a frações consecutivas de uma F_n.



Teorema 2. Sejam $C(p, q)$ e $C(p', q')$ dois círculos de Ford. Se p/q, p'/q', são termos consecutivos da sequência de Farey, então $C(p, q)$ e $C(p', q')$ são tangentes.

Demonstração. De fato, começaremos calculando a distância entre os centros de $C(p, q)$ e $C(p', q')$:

$$d^2 = \left(\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'}\right)^2 + \left(\frac{1}{2q^2} - \frac{1}{2q'^2}\right)^2 \quad (1)$$