

Abordagem de geometria no ensino médio partindo de poliedros

José Luiz Magalhães de Freitas – INMA/UFMS – e-mail: joseluizufms2@gmail.com
Marilena Bittar – INMA/UFMS – e-mail: marilenabittar@gmail.com

O objetivo principal desta oficina é fazer um estudo introdutório de conteúdos básicos de geometria no ensino médio, por meio de atividades com poliedros. Pretende-se, utilizando materiais concretos, iniciar com questionamentos sobre figuras geométricas tridimensionais, bidimensionais e unidimensionais, (polígonos, poliedros, arestas, vértices, diagonais e outros conceitos), visando identificar e classificar poliedros. Em seguida analisar algumas propriedades envolvendo cálculo de diagonais, quantidade de poliedros regulares e relação de Euler entre outras. Pretende-se abordar tanto aspectos teóricos quanto práticos, por meio de questionamentos, exploração de materiais concretos, verificações, justificativas e provas, entre outras formas de produzir e validar conhecimentos geométricos na educação básica.

Nessa perspectiva apresentamos, a seguir, algumas atividades com o objetivo de contribuir com esse processo de investigação, análise, discussão e sistematização de conteúdos geométricos na educação básica.

ATIVIDADE 1: *Identificação de elementos dos poliedros e classificação*

Buscando identificar conceitos básicos e propriedades, fazendo uso de um conjunto de poliedros, apresentamos algumas questões:

Há poliedros que possuem todas as faces “iguais”?

Em quais poliedros todas as faces são paralelogramos?

Em quais poliedros todas as faces são retangulares?

Em quais poliedros todas as faces são triangulares?

Há poliedros que possuem duas faces “congruentes” e paralelas opostas e as demais faces são todas paralelogramos?

Para quais desses poliedros é possível apoiar uma das faces sobre uma superfície plana de tal forma que um único vértice fique fora dela e as demais faces (laterais) sejam todas triangulares? Qual é o nome de um poliedro desse tipo?

Há poliedros em que o número de faces é sempre igual ao número de vértices? É possível representar em um diagrama os poliedros correspondentes a cada uma das respectivas classes (prismas, pirâmides, poliedros regulares e outros)? Os cubos e os paralelepípedos estariam incluídos em quais dessas classes?

ATIVIDADE 2: Identificação e classificação de polígonos

Para o desenvolvimento desta atividade, sugerimos o uso do mecano (material constituído de ripinhas articuladas).

Com base em definições de polígonos, classifique as afirmações abaixo em verdadeiras ou falsas:

- () Todo quadrado é um retângulo.
- () Todo quadrado é um losango.
- () Todo retângulo é um quadrado.
- () Um paralelogramo que tem lados congruentes é um losango.
- () Os retângulos que são losangos são quadrados.
- () Um paralelogramo é sempre um retângulo.
- () Os lados opostos de um paralelogramo são paralelos.
- () Os lados opostos de um quadrado são perpendiculares.
- () Existem paralelogramos que são trapézios.
- () Os lados consecutivos de um quadrado são perpendiculares.
- () Polígonos equiláteros são equiângulos.
- () Existem polígonos que são equiângulos mas que não são equiláteros.

ATIVIDADE 3 – *Diagonais de poliedros*

Qual a definição de diagonal de um polígono? Qual a definição de diagonal de um poliedro? Como determinar o número de diagonais de um polígono? Como determinar o número de diagonais de um poliedro convexo?

ATIVIDADE 4 – *Poliedros regulares*

Por que existem apenas cinco tipos de poliedros regulares?

ATIVIDADE 5 : *Determinação da quantidade de vértices, faces e arestas*

Pegue um poliedro qualquer no conjunto de sólidos construídos. Identifique esse sólido e em seguida identifique a quantidade de faces, de vértices (encontro de pelo menos três arestas) e de arestas (parte comum de duas faces). Em seguida, preencha uma tabela com quatro colunas, em que a primeira coluna corresponde ao tipo de poliedro (tetraedro, cubo, prisma pentagonal, octaedro regular, pirâmide quadrangular, prisma triangular), a 2ª, 3ª e 4ª colunas correspondem respectivamente ao número de vértices, faces e arestas de cada um dos poliedros da primeira coluna.

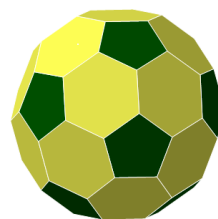
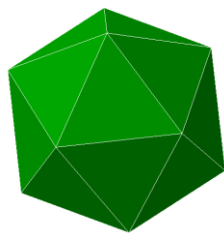
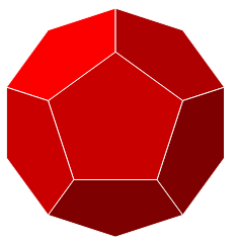
Após o preenchimento da tabela responda às seguintes questões:

Qual coluna corresponde a figuras que “habitam” espaços unidimensionais? E bidimensionais? Quais pertencem ao espaço tridimensional? Há uma relação entre as quantidades de elementos que aparecem nas colunas desta tabela e como ela pode ser explicitada? É possível prová-la?

Retomada e aprofundamento das atividades propostas

ATIVIDADE I: *Identificação de elementos dos poliedros e classificação*

Numa abordagem introdutória podemos considerar um **poliedro** como sendo um sólido limitado por polígonos¹, que são denominados de **faces** do poliedro. Inicialmente, podemos classificar os poliedros em 3 grupos: **prismas**, **pirâmides** e **outros** que não são nem prismas nem pirâmides, como os representados abaixo. Há também outras classes importantes de poliedros como os **cubos**, os **paralelepípedos** e os **poliedros regulares**.



Prismas

Um **prisma** pode ser identificado como um poliedro que possui duas faces paralelas e iguais, chamadas de bases do prisma, e cujas faces laterais são paralelogramos. No entanto, é possível dar uma definição mais aceitável do ponto de vista matemático, como a que vamos apresentar a seguir.

Se considerarmos dois polígonos iguais (congruentes) situados em planos paralelos π_1 e π_2 , então um **prisma** é o sólido formado pela reunião de todos os segmentos cujos extremos pertencem a esses dois polígonos e que são paralelos a uma reta L que intercepta esses dois planos. Se a reta L é perpendicular aos planos π_1 e π_2 então o prisma é denominado **prisma reto** e se L não é perpendicular aos planos π_1 e π_2 ele é chamado de **prisma oblíquo**. Os

¹ Neste texto, para facilitar a linguagem, estamos identificando polígono com região poligonal.

dois polígonos do prisma situados nos planos π_1 e π_2 são chamados de **bases do prisma**. A **altura do prisma** é a distância entre os dois planos que contêm as bases.

Se a base do prisma é um triângulo, quadrado, pentágono, hexágono, etc., então ele é chamado de prisma triangular, quadrangular, pentagonal, hexagonal, etc. Se as bases do prisma são paralelogramos, o prisma é chamado de **paralelepípedo**. Quando todas as faces do prisma são retangulares, o prisma é chamado de **paralelepípedo retângulo** ou **bloco retangular**. Caso todas as faces de um paralelepípedo sejam quadrados, trata-se de um prisma especial que é o **cuubo**, também denominado de **hexaedro regular**.

Pirâmides

Inicialmente, podemos considerar **pirâmide** como um poliedro em que uma de suas faces é um polígono qualquer, chamado de **base da pirâmide** e cujas **faces laterais** são triângulos com um vértice comum. No entanto, podemos aprimorar nosso conhecimento sobre essa noção e apresentá-la com um pouco mais de cuidado, do ponto de vista matemático, conforme faremos a seguir.

Considere um polígono contido num plano π e V um ponto fora desse plano. O sólido formado pela reunião de todos os segmentos que unem o ponto V aos pontos do polígono é denominado **pirâmide**. O polígono situado no plano π é chamado de **base da pirâmide**. A base é uma face da pirâmide e as demais faces (**faces laterais**) são triângulos que possuem o vértice V (**vértice da pirâmide**) em comum e um lado em comum com o polígono da base. A **altura da pirâmide** é a distância de V até o “pé” da reta perpendicular ao plano π , passando pelo ponto V .

É possível perceber que em toda pirâmide o número de vértices é sempre o mesmo que o número de faces. Para isso basta associar o polígono da base ao vértice oposto a ele e pensar que a cada face triangular (lateral) da pirâmide podemos associar uma aresta da base e conseqüentemente um vértice do polígono da base.

No esquema a seguir apresentamos uma ilustração para uma classificação dos sólidos geométricos.

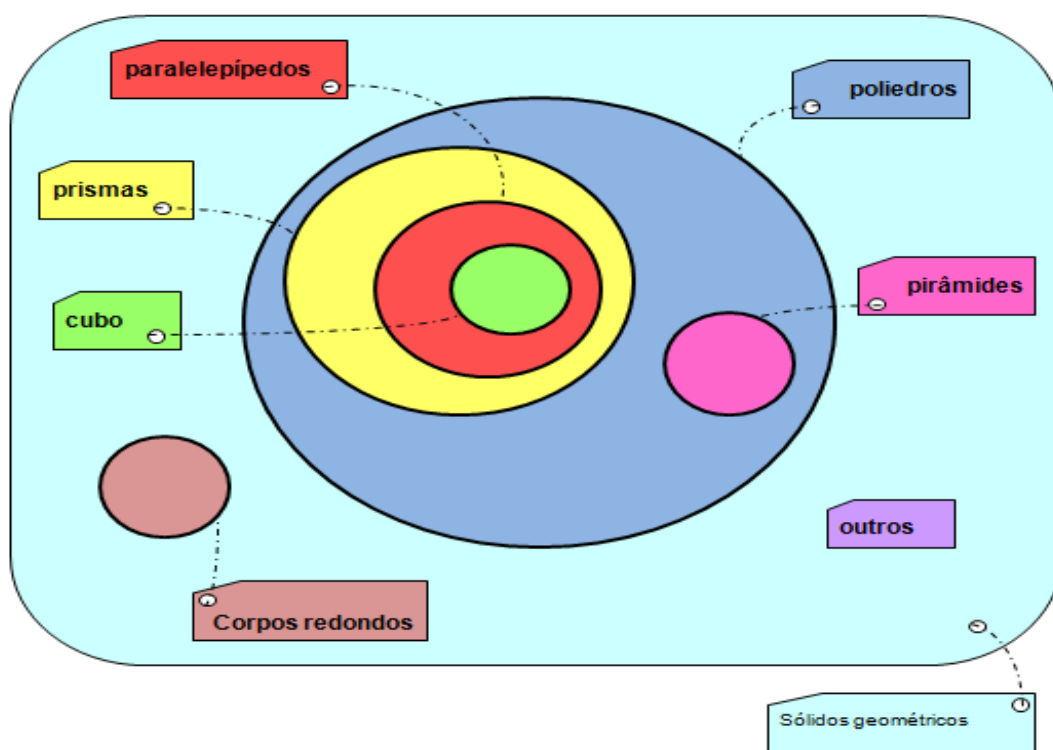


Fig. 1 – Diagrama para representar classes de sólidos geométricos

No desenvolvimento da **atividade 1** é possível que alguns alunos apresentem dúvidas sobre definições e propriedades de alguns poliedros. É provável que eles não encontrem dificuldade para identificar algumas pirâmides, particularmente a quadrangular que aparece com maior frequência, por causa das **pirâmides** do Egito. No entanto, eles podem encontrar dificuldade para

identificar o conjunto de **prismas**, ou seja, poliedros que possuem duas faces opostas iguais e situadas em planos paralelos, cujas faces laterais são paralelogramos. A identificação de **poliedros regulares**, ou seja, aqueles cujas faces são polígonos regulares e iguais (congruentes), também são facilmente identificados. Talvez possa surgir alguma dúvida, por exemplo, em inserir o tetraedro regular no conjunto das pirâmides ou em identificar o **cubo** como um **paralelepípedo** e também como **prisma**.

O objetivo da **atividade 2** é retomar a identificação e classificação de alguns polígonos, particularmente dos quadriláteros. Nesse estudo, podem ser utilizados outros materiais manipuláveis, por exemplo, o **mecano**, material constituído de “ripinhas” de madeira, fixadas por parafusos, ou construído com outro material.

Espera-se que os alunos percebam que ao se movimentar, por exemplo, os lados de um paralelogramo ou de um quadrado com peças do **mecano**, há propriedades que mudam e outras que permanecem válidas nas figuras obtidas por deformação. Neste caso, como as medidas dos lados permanecem inalteradas o perímetro não muda. Ao movimentarmos os lados do retângulo, eles permanecem paralelos, logo os quadriláteros obtidos com as deformações são sempre paralelogramos. Neste caso, eles deverão observar que as medidas dos ângulos internos mudam, mas as medidas dos ângulos opostos continuam sempre iguais e a soma das medidas dos quatro ângulos internos também continua sempre igual a 360° . Por outro lado, ao deformarmos um quadrado, como seus lados continuam com a mesma medida, os quadriláteros obtidos continuam sendo losangos, mas deixam de ser quadrados, à medida que seus ângulos variam. Um fato a ser observado ao movimentar os lados opostos desses paralelogramos é que apesar de o perímetro se manter

constante, suas áreas mudam, pois embora a base deles continue fixa, sua altura varia.

Para ajudar a responder às questões desta atividade, apresentamos mais alguns elementos conceituais, iniciando pelas definições dos principais quadriláteros. Vale ressaltar que, do ponto de vista matemático, uma boa definição deve conter os elementos estritamente necessários para caracterizar um conceito. Não devendo conter mais do que precisa, para não ficar “inchada”, e nem menos, senão fica faltando elementos que garantam a sua identificação. Assim definimos:

Paralelogramo é um quadrilátero que possui os lados opostos paralelos.

Losango é um quadrilátero que tem todos os lados com a mesma medida.

Retângulo é um quadrilátero que tem todos os ângulos retos.

Trapézio é um quadrilátero que possui somente dois lados opostos paralelos.

Um **polígono equilátero** é aquele cujos lados possuem a mesma medida. Da mesma forma um polígono é **equiângulo** quando os seus ângulos internos possuem a mesma medida.

Com base nessas definições, seguem as respostas e comentários sobre as questões propostas:

(V) Todo quadrado é um retângulo.

Pela definição dada os quadrados possuem todos os ângulos retos.

(V) Todo quadrado é um losango.

A definição de quadrado diz que seus lados possuem a mesma medida.

(F) Todo retângulo é um quadrado.

A definição de retângulo não diz nada sobre as medidas dos seus lados e, portanto, eles não são necessariamente iguais.

(V) Um paralelogramo que tem todos os lados congruentes é um losango.

Para que um quadrilátero seja um losango basta que ela tenha os quatro lados congruentes.

(V) Os retângulos que são losangos são quadrados.

Por serem retângulos possuem os *quatro ângulos retos* e por serem também losangos os seus *quatro lados têm a mesma medida*.

(F) Um paralelogramo é sempre um retângulo.

O fato de possuir os lados opostos paralelos não garante que os ângulos do paralelogramo sejam retos, necessariamente.

(V) Os lados opostos de um paralelogramo são paralelos.

Essa propriedade é garantida pela definição de paralelogramo que foi dada.

(F) Os lados opostos de um quadrado são perpendiculares.

Todo quadrado é um paralelogramo e, portanto, seus lados opostos são paralelos.

(F) Existem paralelogramos que são trapézios.

Pela definição dada os trapézios possuem apenas um par de lados opostos paralelos e, portanto, eles não podem ser paralelogramos.

(V) Os lados consecutivos de um quadrado são perpendiculares.

Por definição todos os ângulos do quadrado são retos e eles são formados por lados consecutivos.

(V) Existem polígonos equiláteros que não possuem todos os ângulos iguais (mesma medida).

No conjunto dos quadriláteros os losangos possuem os ângulos opostos iguais, mas não necessariamente todos os quatro ângulos. É fácil verificar que essa proposição é falsa por meio de manipulações simples de polígonos equiláteros representados com peças do **mecano**.

(V) Existem polígonos que possuem todos os ângulos iguais e que não são equiláteros.

No conjunto dos quadriláteros os retângulos são equiângulos, mas não são necessariamente equiláteros. De modo geral, dado um polígono regular (equilátero e equiângulo), se traçarmos uma reta paralela a um de seus lados, interceptando os dois lados, obtemos um polígono com ângulos congruentes ao polígono dado.

Na figura a seguir apresentamos um diagrama para ilustrar a classificação dos quadriláteros.

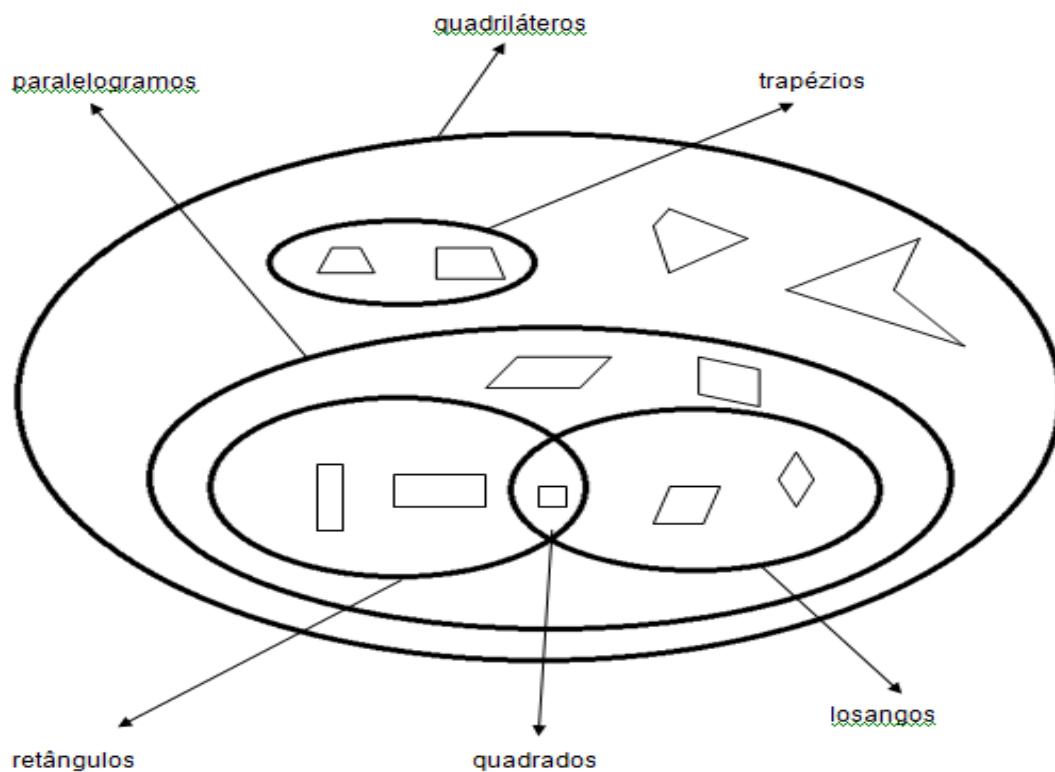


Fig. 2: Diagrama para representar classes de quadriláteros

A **atividade 3** consiste em determinar a **quantidade de diagonais de um poliedro convexo**. Acreditamos que o processo de descoberta do número de diagonais de um poliedro possibilita, não somente realizar experimentações,

por meio da manipulação de sólidos, mas também mobilização de imagens mentais envolvendo diversos conceitos.

Desse modo, essa atividade poderia ser iniciada com perguntas sobre poliedros mais simples. Por exemplo: Quantas diagonais tem um cubo? E um tetraedro? E uma pirâmide qualquer? E um prisma pentagonal? Qual o total de segmentos, ligando dois vértices quaisquer de um poliedro de V vértices? As diagonais das faces são diagonais do poliedro?

Para responder questões dessa natureza há necessidade de estar claro o que é diagonal de um poliedro, bem como de processos utilizados para determiná-las.

Uma **diagonal de um polígono** é definida como um segmento que une quaisquer dois de seus vértices, não consecutivos. De maneira semelhante, uma **diagonal de um poliedro** é um segmento que une dois de seus vértices que não estão sobre uma mesma face. Com base nessas definições podemos verificar que um **triângulo** não possui diagonal alguma, um quadrilátero possui duas diagonais, um **pentágono** possui cinco diagonais, o **cubo** possui quatro diagonais e que o tetraedro não possui nenhuma diagonal.

Para determinar o número de diagonais de um polígono, pode-se utilizar procedimentos diferentes, por exemplo, contar todos os segmentos ligando dois vértices quaisquer e em seguida subtrair, do total obtido, o número de lados. Outro procedimento para determinar o total de segmentos ligando dois pontos quaisquer também pode ser determinado de diferentes procedimentos de contagem (utilizando progressão aritmética, análise combinatória, ...). Um outro modo de encontrar o número de diagonais de um polígono consiste em verificar quantas diagonais partem de cada vértice do polígono, por exemplo, não é difícil observar que se um polígono tem n vértices, de cada vértice parte $(n-3)$

diagonais e assim o total de diagonais d é dado pela fórmula $d = \frac{n.(n-3)}{2}$ que, como já observado, poderia ser obtida de outra forma.

Podemos observar também que *as pirâmides não possuem diagonais*. De fato, para que um segmento ligando dois vértices de uma pirâmide fosse uma diagonal seria necessário que ele não estivesse contido em nenhuma de suas faces. No entanto, nas pirâmides os segmentos ligando dois quaisquer de seus vértices só podem ser arestas ou diagonais do polígono da base e, portanto, não são diagonais da pirâmide.

No caso de um *prisma pentagonal*, ou seja, cuja base é um pentágono, podemos determinar o seu número de diagonais analisando o número de diagonais que partem de cada um de seus vértices.

Desse modo, tomando um vértice qualquer desse prisma, observamos que dele partem 3 arestas, 2 diagonais da base e 2 diagonais das faces laterais. Analisando um pouco mais percebemos que só sobram dois vértices para serem ligados e ao ligar esse vértice com os dois vértices que sobraram, obtemos segmentos que não são arestas e nem diagonais das faces, ou seja, são *diagonais desse prisma*. Assim, como de cada vértice podemos traçar duas diagonais, poderíamos chegar à conclusão de que o total de diagonais fosse 20 (10.2), mas como nesse procedimento cada diagonal do prisma foi contada duas vezes, o número de diagonais do prisma pentagonal é a metade de 20, ou seja, 10.

De maneira semelhante podemos generalizar esse procedimento para *determinar o número de diagonais de um prisma* cujo polígono da base possui n lados. Neste caso, é possível traçar $(n-3)$ segmentos a partir de cada vértice,

ligando-o aos vértices da base oposta, pois não estão contidos em nenhuma das faces do prisma, portanto, diagonais do prisma. Como o total de vértices é $2n$ teríamos um total de $2n(n-3)$ diagonais, mas como cada diagonal foi contada duas vezes, chegamos então à conclusão de que o número total de diagonais do prisma é $n.(n-3)$. No caso do prisma de base pentagonal ($n=5$), o número de diagonais é $5.(5-2) = 10$, conforme já tínhamos determinado sem o uso da fórmula. Podemos também verificar pela fórmula que os prismas que são paralelepípedos, ou blocos retangulares, possuem 4 diagonais, ou seja, $4.(4-3)$, pois neste caso $n=4$.

Outro modo de resolver este problema consiste em calcular primeiramente o total de segmentos ligando dois vértices quaisquer do prisma e desse total retirar os segmentos que não são diagonais. O total de segmentos é $2n(2n-1)/2$, ou seja, $n(2n-1)$. Para determinar o número de diagonais do prisma, basta subtrair desse total as arestas do prisma ($3n$) e as diagonais de todas as faces, ou seja, as das faces laterais e das duas bases. Como o total de faces laterais é n e cada uma possui duas diagonais, pois são paralelogramos, o total de diagonais dessas faces é $2n$. Como cada uma das bases é um polígono de n lados, cada base possui $n.(n-3)/2$ diagonais e, portanto, o total de diagonais das bases é $n.(n-3)$. Efetuando esses cálculos:

$$n(2n-1) - 3n - 2n - n(n-3) = 2n^2 - n - 3n - 2n - n^2 + 3n = n^2 - 3n = n(n-3)$$

Obtemos assim, o mesmo resultado que já havíamos encontrado, mas utilizando outro raciocínio.

A ideia é conduzir os questionamentos para a descoberta da fórmula do número de diagonais de um poliedro, ou seja, que o número de diagonais de um poliedro é dado obtido por: $D = C_2^V - (A + d)$

Onde:

D : quantidade de diagonais do poliedro

C_2^V : combinação dos vértices do poliedro dois a dois

A : número de arestas do poliedro

d : número de diagonais das faces

De fato, C_2^V dá o número total de segmentos ligando dois vértices quaisquer do poliedro. Se desse total retirarmos as arestas e as diagonais das faces o que sobra é o número de diagonais do poliedro.

A **atividade 4** é concernente a uma proposição que aparece no final do último volume da obra “Os Elementos” de Euclides, na qual que ele responde à questão: Por que existem apenas cinco tipos de poliedros regulares?

É possível constatar experimentalmente que essa propriedade é válida. Para isso é necessário observar algumas condições que devem ser satisfeitas pelos polígonos das faces desses poliedros regulares. Como as faces são polígonos regulares, **o número de lados de cada polígono da face é sempre maior ou igual a 3**, ou seja, podem ser triângulos equiláteros, quadrados, pentágonos regulares, hexágonos regulares, Uma outra restrição é a de que **o número de polígonos em cada vértice também é sempre maior ou igual a 3**, caso essa condição não fosse verificada não teríamos ângulos poliédricos e sim ângulos diedros, ou seja o vértice ficar “aberto”. Por fim, há ainda a condição de que **a soma dos ângulos em torno de cada vértice é sempre inferior a 360°**, pois caso não houvesse essa restrição o ângulo poliédrico ficaria plano e deixaríamos de obter um ângulo poliédrico.

A comprovação experimental consiste em construir polígonos regulares congruentes em cartolina ou outro material e ir colando a mesma quantidade de cada tipo de polígono regular em torno dos vértices e verificar quais poliedros regulares é possível construir. Assim, verifica-se que com os triângulos equiláteros é possível construir o **tetraedro regular**, colocando três triângulos em cada vértice. Ainda com triângulos equiláteros dá para construir o **octaedro regular**, colocando quatro triângulos em cada vértice. Por fim, ainda é possível construir o **icosaedro regular**, colocando cinco desses triângulos em cada vértice. Observa-se que não é possível colocar seis triângulos em cada vértice, pois como eles são equiláteros, a soma de seus ângulos seria 360° e obteríamos uma superfície plana em torno do vértice e não mais um ângulo poliédrico. Com os quadrados vemos que se colocarmos três quadrados em torno de cada vértice obtemos o **cubo (hexaedro regular)** e com quatro em cada vértice planificaria. Portanto, além do cubo não é possível construir outros poliedros regulares com faces quadradas. Tomando os pentágonos regulares observa-se que ao colocar três deles em cada vértice o poliedro que se obtém é **o dodecaedro regular**. Não é possível construir outros poliedros regulares com faces pentagonais, pois cada ângulo interno do pentágono regular mede 108° e, com quatro ou mais desses polígonos teríamos a soma dos ângulos maior que 360° , o que inviabiliza a construção. Também por esse motivo observa-se que não é possível construir poliedros regulares cujas faces sejam hexágonos regulares, heptágonos regulares, etc. Conclui-se então que só é possível construir **cinco tipos de poliedros regulares**.

Os gregos se dedicaram ao estudo da geometria e não deixaram os poliedros regulares de lado, em particular a justificativa da existência de apenas cinco tipos deles. Aliás, as principais ideias da justificativa experimental apresentada

acima estão presentes nos “Os elementos”, no final do volume 13, como um coroamento dessa obra clássica, que transcrevemos a seguir.

Digo, então, que exceto as cinco ditas figuras² não será construída outra figura, contida por equiláteras e também equiângulas iguais entre si.

Pois, um ângulo sólido³ não é construído, certamente, por dois triângulos, ou em geral, planos. Mas por três triângulos, o da pirâmide, e por quatro, o do octaedro, e por cinco, o do icosaedro; mas por seis triângulos tanto equiláteros quanto equiângulos, construídos junto a um ponto, não existirá um ângulo sólido; pois, sendo o ângulo de um triângulo equilátero dois terços de um reto, os seis serão iguais a quatro retos; o que é impossível; pois todo ângulo sólido é contido por um menor do que quatro retos. Pelas mesmas coisas, então, nem um ângulo sólido é construído por mais do que seis ângulos planos. Mas o ângulo do cubo é contido por três quadrados; e por quatro, é impossível; pois, de novo, será quatro retos. Mas por pentágonos equiláteros e equiângulos, certamente por três, o do dodecaedro; e por quatro, é impossível; pois, sendo o ângulo do pentágono equilátero um reto e um quinto, os quatro ângulos serão maiores do que quatro retos; o que é impossível. Nem, por certo, por outras figuras poligonais será contido um ângulo sólido, pelo mesmo absurdo.

² Essas cinco figuras a que Euclides se refere são o cinco poliedros regulares.

³ Ângulo sólido é a denominação que Euclides usava para ângulo poliédrico.

Portanto, exceto as cinco ditas figuras, uma outra figura sólida não será construída, contida por equiláteros e também equiângulas; o que era preciso provar.

(EUCLIDES, in BICUDO, 2009, p. 592)

A **atividade 5** visa retomar o estudo de relações entre o número de vértices, faces e arestas de poliedros por meio da manipulação de materiais concretos representantes desses poliedros. Observa-se que normalmente os alunos dos anos finais do ensino fundamental não encontram dificuldade para preencher uma tabela do tipo abaixo, pois este conteúdo está presente nos livros didáticos da educação básica, desde os anos iniciais do ensino fundamental.

Sólido	V	A	F
Tetraedro	4	6	4
Cubo	8	12	6
Prisma Pentagonal	10	15	7
Octaedro regular	6	12	8
Pirâmide quadrangular	5	8	5
Prisma triangular	6	9	5

Observando os elementos das colunas desta tabela é possível perceber que os elementos da primeira coluna são sólidos geométricos, objetos tridimensionais. A segunda coluna é constituída de vértices dos poliedros, ou seja, pontos e portanto objetos de dimensão nula. As arestas são segmentos de reta, objetos unidimensionais, que possuem apenas comprimento. Na última coluna estão representadas as faces, que são polígonos, superfícies que constituem partes do plano, ou seja, objetos do espaço bidimensional. Os poliedros são sólidos

que possuem volume, cada aresta possui um comprimento e cada face é uma superfície para qual podemos calcular a sua área.

Por outro lado, analisando os números é possível identificar uma relação entre o número de vértices, de faces e de arestas, conhecida como **Relação de Euler ou Teorema de Euler**, cujo enunciado para poliedros convexos é o seguinte:

Em todo poliedro convexo ou em toda superfície poliédrica convexa fechada, vale a relação: $V - A + F = 2$.

Onde V é o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces.

Uma maneira de provar essa relação é usar o Lema de Euler que diz: Em toda superfície poliédrica aberta, vale a relação: $V_a - A_a + F_a = 1$.

A prova desse Lema pode ser feita por indução finita em relação ao número de faces.

Usando esse Lema, basta tomar uma superfície poliédrica fechada e dela retirar uma face. Analisando-se essa superfície conclui-se a prova do Teorema de Euler.

Uma outra prova do Teorema de Euler, que utiliza noções de grafos, pode ser encontrada no livro *A Matemática no Ensino Médio – vol. 2*, de Lima et al., publicação da SBM.

Esta relação nos assegura que para qualquer poliedro a soma do seu número de vértices (V), mais o número de faces (F) é igual o número de arestas (A) mais dois. Simbolicamente esta relação é representada por $V+F = A+2$. Além de verificar a validade para os sólidos da tabela e mais alguns, não é difícil justificar a validade dessa relação para alguns tipos de poliedros particulares como os prismas e as pirâmides.

Vamos então verificar que a relação de Euler é válida para um prisma qualquer cuja **base** é um polígono de **n** lados. De fato, como o prisma possui **duas bases** “iguais” (congruentes) e como cada um dos polígonos das bases possui **n** lados então esse prisma tem **n+2** faces, sendo **n** faces laterais e mais as 2 faces correspondentes às bases.

Esse prisma possui **3n** arestas, sendo **n** arestas laterais, mais **n** arestas de uma base e **n** arestas da outra base. O número de vértices é **2n**, sendo **n** em cada base.

Podemos então concluir que em qualquer prisma é válida a relação de Euler, ou seja, que $V + F = A + 2$. De fato,

$$2n \text{ (Vértices)} + (n+2) \text{ (Faces)} = 3n \text{ (Arestas)} + 2.$$

Vamos agora analisar também a validade da relação de Euler para uma pirâmide qualquer cujo polígono da base possui **n** lados. Observemos inicialmente algumas propriedades das pirâmides com relação à quantidade de vértices, faces e arestas.

Assim, observamos inicialmente que “*em toda pirâmide o número de vértices é igual ao número de faces*”. De fato, para cada vértice da base da pirâmide corresponde uma de suas faces laterais e ao vértice da pirâmide corresponde o seu polígono da base.

Em seguida, verificamos que “*numa pirâmide cujo polígono da base possui n lados possui 2n arestas e n+1vértices*”. De fato, como o polígono base da pirâmide possui **n** lados, o total de arestas é **2n**, sendo **n** arestas da base e **n** arestas laterais. Como o polígono da base possui **n** lados a pirâmide possui **n+1** faces, sendo **n** triangulares e mais a face da base. Logo, ela também possui **n+1**vértices.

Para analisar a validade da relação de Euler para uma pirâmide cuja base é um polígono de n lados, basta verificar que $(n+1) + (n+1) = 2n + 2$, ou seja, o número de vértices mais o número de faces é igual ao número de arestas mais 2.

Deste modo, dado o total de vértices de uma pirâmide, como sabemos que ele é igual ao de faces, pela relação de Euler determinamos quantas arestas essa pirâmide possui. Da mesma forma, se fosse dado o número de faces ou o número de vértices, ou seja, sabendo apenas a quantidade de um desses elementos, pela relação de Euler determinamos os outros dois.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BITTAR, M. e FREITAS, J. L. M. **Fundamentos e metodologia de matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental** – 2ª edição. Campo Grande-MS: Editora da UFMS, 2005.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental, **Parâmetros Curriculares Nacionais, Matemática**. Brasília: MEC /SEF, 1998.

BRASIL, **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar – Gestar II. Matemática**. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Brasília 2008.

EUCLIDES. **Os elementos/Euclides**; tradução e introdução de Irineu Bicudo. - São Paulo: Editora UNESP, 2009.

FREITAS, J.L.M. **Espaço e Forma – Módulo II** – Material apostilado para curso de formação de professores da rede estadual do ensino fundamental de 5ª. à 8ª. séries. Campo Grande – MS, 2003.

FREITAS, J.L.M. **Uma introdução à Geometria na Educação Básica partindo de poliedros** – Material apostilado que integra os Cadernos do LEMA. Editora UFMS - Campo Grande – MS, 2011.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática no Ensino Médio** – vol. 2 – 6ª. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. (org.). **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo: Editora Atual, 1994.

MOISE & DOWNS. **Geometria Moderna**, 2 vol. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, colaboração da Editora Universidade de Brasília, 1971.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria de Estado da Educação. **Por um ensino melhor: treinamento de professores de 1º grau por multimeios**. Módulo 5 – Geometria; coordenação de Gilda de Lima. São Paulo, MEC/SE/CEBO/DRHU/FPA, 1978.