ELIPSES INSCRITAS NUM TRIÂNGULO

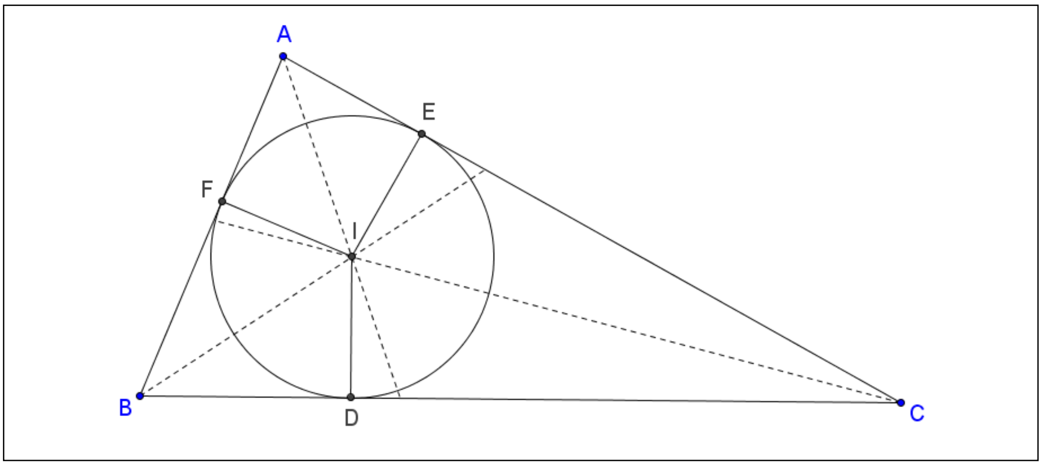
SERGIO ALVES
IME-USP

Freqüentemente apresentada como um exemplo notável de sistema dedutivo, a Geometria tem, em geral, seus aspectos indutivos relegados a um segundo plano. Entretanto, na prática, é comum a descoberta de um resultado geométrico a partir de algum processo indutivo de investigação para, somente numa etapa posterior, o argumento dedutivo ser utilizado na obtenção de uma prova rigorosa da sua validade.

Por esta razão, devemos encorajar nossos alunos a explorar ideias geométricas por meio de variadas técnicas indutivas de investigação e, entre estas, as construções geométricas ocupam um lugar de destaque.

Em cada uma das atividades propostas neste trabalho existe pelo menos uma relação geométrica a ser descoberta e, salvo menção em contrário, elas devem ser desenvolvidas com régua e compasso. As definições e resultados apresentados se referem a um fixado plano euclidiano $\wp$. Se disponíveis, programas computacionais de geometria dinâmica podem ser usados.

MOTIVAÇÃO. As bissetrizes dos ângulos internos de qualquer triângulo *ABC* são concorrentes num ponto *I* pertencente ao seu interior. Tal ponto é eqüidistante das retas que contém os lados do triângulo e, portanto, *I* é o centro de uma circunferência tangente aos três lados do triângulo. Essa circunferência e o ponto *I* são chamados **circunferência inscrita** no triângulo *ABC* e **incentro** do triângulo *ABC*, respectivamente.



PROBLEMA. Existem outras elipses inscritas no triângulo *ABC*?

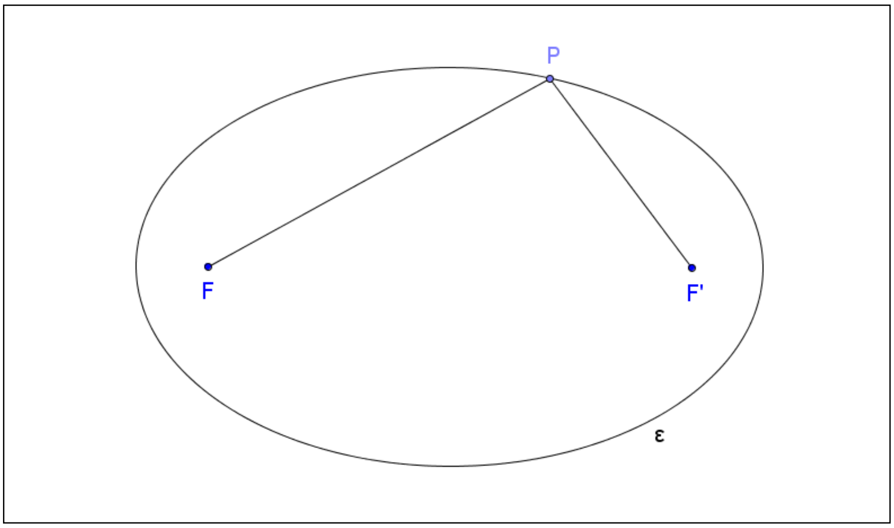
ATIVIDADE 1. Desenhe uma circunferência arbitrária σ e denote por F' o seu centro. Assinale um ponto F em seu interior, F distinto de F'. Indique por $2a$ o raio de σ.

(a) Sendo T um dos dois pontos em que a reta FF' intersecta σ, trace a circunferência α que passa por F e é tangente a σ em T. Se P indica o centro de α, qual o valor da soma das distâncias PF e PF'? Esse valor se mantém para o centro da circunferência que passa por F e é tangente a σ no outro ponto em que a reta FF' intersecta σ?

(b) Sendo T um ponto arbitrário pertencente a σ, trace a circunferência α que passa por F e é tangente a σ em T. Se P indica o centro de α, o valor obtido no item anterior ainda é válido? Repita esta atividade para outras escolhas de T e verifique os resultados.

(c) No caso em que os pontos F e F' coincidem, qual é a figura descrita pelo centro P da circunferência α quando T percorre σ?

Definição. Sejam F e F' pontos pertencentes ao plano euclidiano $\wp$ e seja a um número real positivo de modo que $2a > FF'$. A **elipse** de **focos** F e F' e **semieixo maior** a é o conjunto ε formado pelos pontos P pertencentes a $\wp$ tais que $PF + PF' = 2a$.

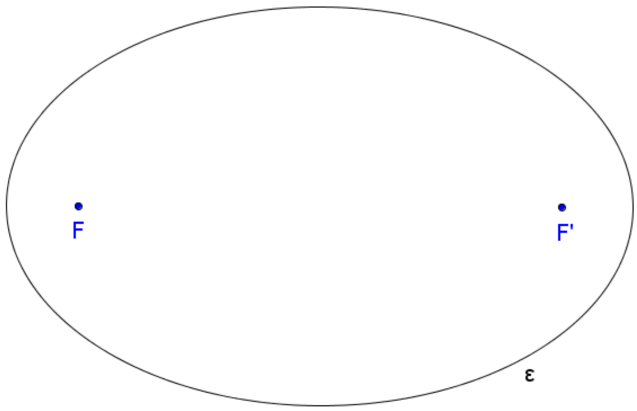


Definição. Dada uma elipse ε de focos F e F' e semieixo maior a, a circunferência de centro F' e raio $2a$ é chamada **circunferência diretriz** da elipse ε relativa ao foco F'.

Proposição 1. *Sejam F e F' pontos pertencentes ao plano euclidiano $\wp$ e seja a um número real positivo de modo que $2a > FF'$. Um ponto P pertence à elipse ε de focos F e F' e semieixo maior a se, e somente se, P é o centro de uma circunferência que passa por F e é tangente à circunferência de centro F' e raio $2a$.*

Exercício. Sejam σ e σ' duas circunferências arbitrárias com σ' contida no interior de σ.
(a) Qual a figura descrita pelos centros das circunferências tangentes internamente a σ e tangentes externamente a σ'?
(b) Qual a figura descrita pelos centros das circunferências tangentes internamente a σ e tangentes internamente a σ'?

ATIVIDADE 2. Na figura abaixo vemos desenhado uma elipse ε de focos F e F' e semieixo maior a.



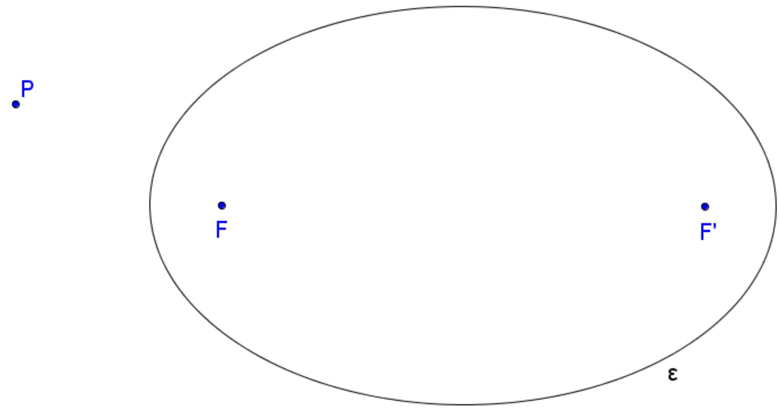
(a) Trace a circunferência diretriz σ da elipse ε relativa ao foco F'.
(b) Assinale um ponto arbitrário $P \in \varepsilon$ e considere o ponto Q em que a semirreta $F'P$ intersecta a circunferência σ. A seguir, trace a mediatriz t do segmento FQ. Verifique graficamente que $P \in t$. Apresente uma prova desse resultado. (Sugestão: Lembre-se da propriedade que caracteriza a mediatriz como lugar geométrico e utilize a definição da elipse ε.)
(c) No seu desenho, além de P, existe algum outro ponto que esteja simultaneamente em t e ε? Prove que, de fato, $t \cap \varepsilon = \{P\}$. (Sugestão: Dado $A \in t$, A distinto de P, mostre que $A \notin \varepsilon$.)

Definição. Dados, no plano euclidiano $\wp$, uma elipse ε e uma reta t, diremos que t é uma **reta tangente** a ε se $t \cap \varepsilon$ contém exatamente um ponto, chamado **ponto de tangência**. Quando $t \cap \varepsilon = \{P\}$, dizemos também que t é uma reta tangente a ε em P.

(d) Dado $P \in \varepsilon$, se Q' é ponto em que a semirreta FP intersecta a circunferência diretriz da elipse ε relativa ao foco F, mostre que a mediatriz do segmento $F'Q'$ coincide com a reta t obtida no item (b).
(e) Confirme a validade da conhecida **propriedade refletora da elipse**: os ângulos que os raios focais PF e PF' formam com a reta tangente a ε em P são congruentes.

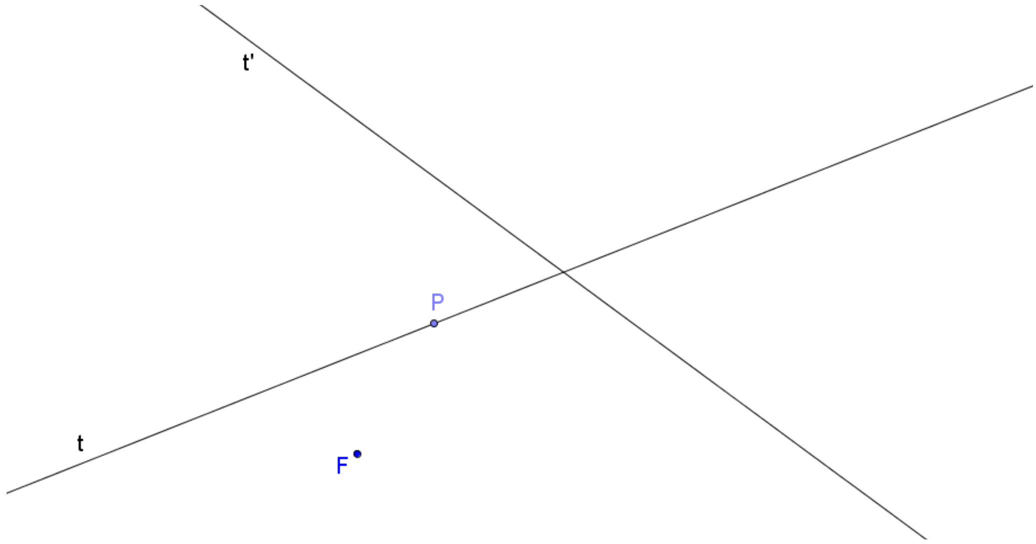
O procedimento apresentado nos itens (a) e (b) da Atividade 2 nos dá o traçado da reta tangente a uma elipse ε por um ponto $P \in \varepsilon$. A seguir, solicita-se que você descubra uma adaptação ao caso em que P pertence ao exterior de ε.

ATIVIDADE 3. Na figura abaixo vemos desenhado uma elipse ε de focos F e F' e semieixo maior a e um ponto P pertencente ao exterior de ε. Trace, pelo ponto P, as duas retas tangentes à elipse ε.



Uma elipse ε é definida pelos seus focos e seu semieixo maior. Quando esses elementos puderem ser construídos com régua e compasso, diremos que a elipse ε está determinada com régua e compasso. Vejamos alguns exemplos.

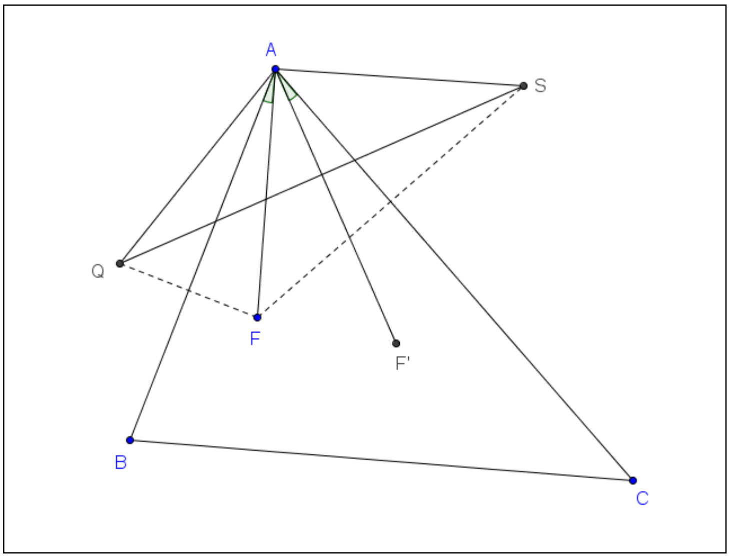
ATIVIDADE 4. Na figura abaixo vemos desenhado duas retas t e t' e dois pontos F e P, com $F \notin t \cup t'$ e $P \in t$. Determine, com régua e compasso, uma elipse ε tendo F como um de seus focos de modo que t e t' sejam retas tangentes a ε, com t tangente a ε em P.



Na próxima atividade é proposto que você apresente uma solução para o problema colocado no início destas notas.

ATIVIDADE 5. Desenhe um triângulo arbitrário *ABC* e assinale em seu interior um ponto qualquer *F*. Determine, com régua e compasso, uma elipse ε tendo *F* como um de seus focos de modo que as retas *AB*, *BC* e *CA* sejam tangentes a ε.

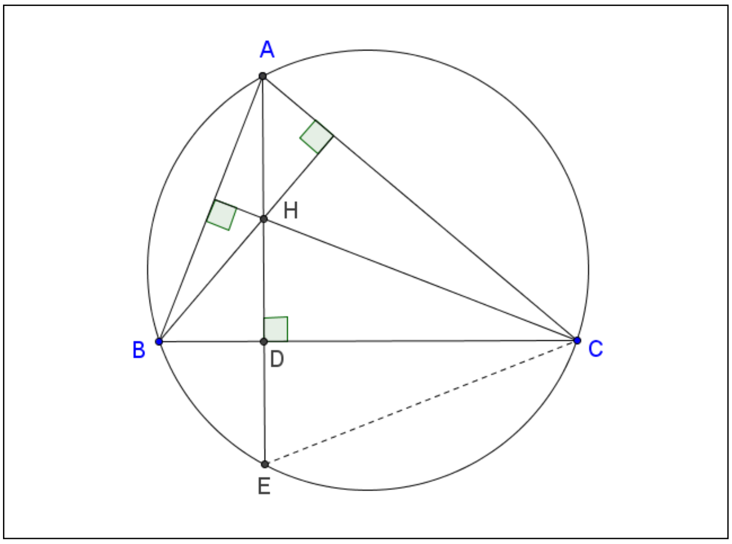
Exercício. Mostre que o segundo foco *F′* da elipse ε obtida na atividade anterior também pertence ao interior do triângulo *ABC*. (Sugestão: Mostre que as semirretas *AF* e *AF′* são simétricas em relação à reta que contém a bissetriz do ângulo de vértice *A* do triângulo *ABC*. Relacione a figura abaixo com a construção efetuada na Atividade 5.)



ATIVIDADE 6. Repita a Atividade 5 no caso especial em que o ponto *F* é escolhido como o incentro *I* do triângulo *ABC* (Para a determinação do incentro de um triângulo veja a figura na página 1).Neste caso, onde está localizado o segundo foco *F′* da elipse ε?

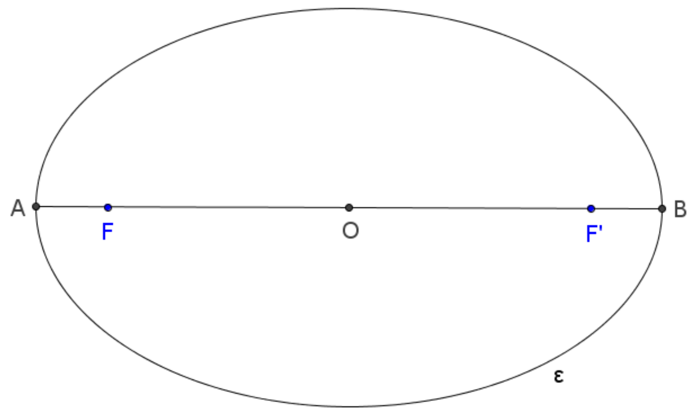
ATIVIDADE 7. Desenhe um triângulo acutângulo *ABC*. Trace as alturas desse triângulo e verifique graficamente que elas são concorrentes num ponto pertencente ao interior do triângulo. Esse ponto, denotado por *H*, é denominado **ortocentro** do triângulo *ABC*.

Exercício. Mostre que os simétricos de *H* em relação às retas *AB*, *BC* e *CA* pertencem à circunferência circunscrita ao triângulo *ABC*. (Sugestão: Considere a altura *AD* do triângulo e seja *E* o ponto distinto de *A* em que a reta *AD* intersecta a circunferência circunscrita ao triângulo *ABC*. Verifique que *DH* = *DE* e conclua que *E* é o simétrico de *H* em relação à reta *BC*.)



ATIVIDADE 8. Repita a Atividade 5 no caso especial em que o ponto F é escolhido como o ortocentro H de um triângulo acutângulo ABC. Neste caso, onde está localizado o segundo foco F' da elipse ε?

ATIVIDADE 9. Na figura abaixo vemos desenhado uma elipse ε de focos F e F' e semieixo maior a. O ponto médio O do segmento FF' é chamado **centro** da elipse ε. Observe que $OA = OB = a$.



(a) Assinale um ponto arbitrário $P \in \varepsilon$ e trace a reta t tangente a ε em P. (Sugestão: Proceda como nos itens (a) e (b) da Atividade 2.)

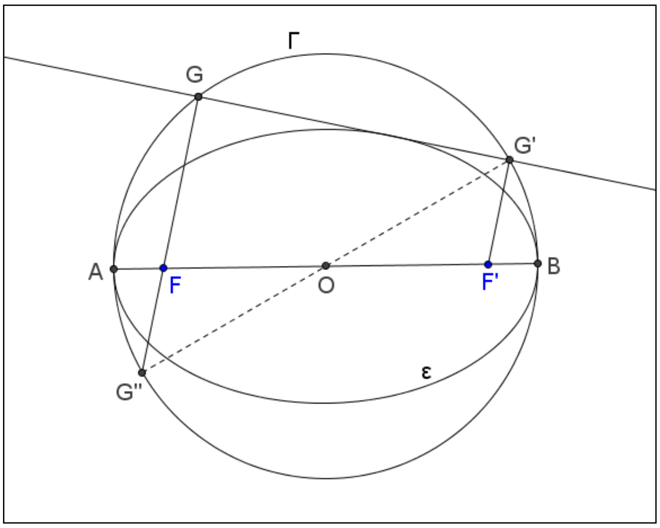
(b) Determine a projeção ortogonal *G* do foco *F* sobre a reta *t*. Meça, com uma régua graduada, os segmentos *OG* e *OA* e verifique que seus comprimentos são iguais. Você consegue provar esse resultado? (Sugestão: Lembre-se da propriedade da linha média de um triângulo.)
(c) Reciprocamente, suponha que *G* seja um ponto tal que *OG* = *a*. Mostre que *G* é a projeção ortogonal de um dos focos de ε sobre uma reta tangente a ε.

Definição. Sendo *O* o centro da elipse ε de focos *F* e *F′* e semieixo maior *a*, a circunferência Γ de centro *O* e raio *a* é chamada **circunferência principal** da elipse ε.

Proposição 2. *Um ponto G pertence à circunferência principal de uma elipse* ε *se*, *e somente se*, *G é a projeção ortogonal de um dos focos de* ε *sobre uma reta tangente a* ε.

ATIVIDADE 10. Desenhe uma reta arbitrária *t* e assinale dois pontos quaisquer *F* e *F′*, ambos do mesmo lado de *t*. Determine, com régua e compasso, uma elipse ε de focos *F* e *F′* de modo que *t* seja uma reta tangente a ε.

Exercício. Mostre que o produto das distâncias dos focos de uma elipse a qualquer de suas retas tangentes é constante. (Sugestão: As projeções ortogonais *G* e *G′* dos focos *F* e *F′*, respectivamente, da elipse ε sobre uma reta tangente a ε pertencem à circunferência principal Γ de ε. Sendo *G′′* o ponto distinto de *G* em que a reta *FG* intersecta Γ, mostre que *FG′′* = *F′G′*.)



ATIVIDADE 11. Desenhe um triângulo arbitrário *ABC* e assinale em seu interior um ponto qualquer *F*.
(a) Refaça a Atividade 5.

(b) Obtenha as projeções ortogonais G_1, G_2, G_3 do foco F sobre as retas que contém os lados do triângulo ABC.
(c) Obtenha as projeções ortogonais G_1', G_2', G_3' do foco F' sobre as retas que contém os lados do triângulo ABC.
(d) Verifique graficamente que os seis pontos G_1, G_2, G_3, G_1', G_2' e G_3' pertencem a uma mesma circunferência. Como você justificaria esse resultado?

ATIVIDADE 12. Desenhe uma circunferência arbitrária Γ de centro O e assinale em seu interior um ponto qualquer F, F distinto de O.
(a) Escolha um ponto $G \in \Gamma$ e trace um ângulo reto de vértice G de modo que um de seus lados passe pelo ponto F.
(b) Repita esse procedimento para diversas escolhas de G.
(c) Verifique graficamente que os lados desses ângulos que não passam pelo ponto F desenvolvem uma elipse. Justifique essa afirmação.

Referência Bibliográfica

[1] Alves, S., *Elipses inscritas num triângulo*, Revista do Professor de Matemática 82 (2013), 46 – 49.