ENCONTRO RPM-UNIVERSIDADE DE MATO GROSSO DO SUL
Roteiro de aulas do mini-curso: A Escavadeira de Cantor
Novembro de 2013
Mário Jorge Dias Carneiro

Introdução

O que é um número real?

A resposta formal e rigorosa a essa pergunta requer a introdução de conceitos e um aprofundamento que geralmente estão longe do nível de maturidade matemática dos alunos de escola básica.

Usaremos uma estratégia muito utilizada na matemática: ao invés de atacar diretamente o problema da caracterização dos números reais, estudamos propriedades de algumas funções definidas nesse conjunto. Este estudo permite vislumbrar a riqueza da estrutura deste conjunto.

A abordagem que escolhemos é dinâmica, ou seja, iremos estudar o comportamento de sequências numéricas de números reais definidas sucessivamente pela iteração de uma função.

Essas sequências aparecem naturalmente, por exemplo, quando calculamos aproximadamente a raiz quadrada de um número.

Iniciamos com o estudo da representação decimal (ou em qualquer base), passando em seguida à representação em frações contínuas. Finalizamos com a construção dinâmica de conjuntos de Cantor e com algumas de suas propriedades.

Este é um roteiro para as duas aulas do mini-curso "A escavadeira de Cantor" oferecido no Encontro RPM-MS-2013.

As principais referências para essas aulas são dois *Artigos Klein* que estão disponíveis e http://klein.sbm.org.br/: " Frações contínuas: como aproximar bem números reais por números racionais", de Carlos Gustavo Moreira e A representação decimal de números reais e o caos dinâmico" de Cesar P. de Oliveira.

No endereço acima encontram-se outros artigos que tratam da quastão de aproximações e erros numéricos.

Visite o site do Projeto e veja mais coisas interessantes por lá.

1 Uma visão dinâmica da expansão decimal

Dados uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e um número $x_0 \in \mathbb{R}$, se definimos a sequência $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$,$x_3 = f(x_2)$, ..., geralmente $x_{n+1} = f(x_n)$, o que pode ser afirmado sobre x_n quando tomamos valores cada vez maiores de n?

Observe que podemos escrever $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f \circ f(x_0) = f^2(x_0)$, $x_3 = f(x_2) = f(f^2(x_0)) = f^3(x_0)$. Em geral, $x_n = f \circ f \circ f ... \circ f(x_0)$.

Exemplo 1: O caso linear $f(x) = ax$.

Exemplo 2: $g(x) = ax + b$

Exemplo 3: $h(x) = a|x| + b$ e $H(x) = a|x + b|$

Exemplo 4: O algorítmo de expansão decimal: uma visão dinâmica.

Vamos analisar o algorítmo da expansão decimal.

Tome $x \in (0, 1)$ *ou* $0 < x < 1$. Temos $0 < 10x < 10$ e a parte inteira de $10x$ satisfaz $[10x] \leq 10x < [10x] + 1$ ou $0 \leq 10x - [10x] < 1$. Se $10x = [10x]$ paramos o processo porque $x = \frac{a_1}{10}$.

Caso contrário, podemos repetir o processo para o número $x_1 = 10x - [10x]$ e assim sucessivamente.

Isto motiva a definição de função $f : I \to I$, $f(x) = 10x - [10x]$.

Exercício: trace o gráfico de f.Observe que, para isso, é necessário subdividir o intervalo $[0, 1]$ em 10 intervalos iguais e transladar convenientemente o gráfico de $y = 10x$.

Da definição obtemos: $x = \frac{[10x]}{10} + \frac{f(x)}{10}$, com $0 < f(x) < 1$.

Aplicando o mesmo raciocínio para $f(x)$ escrevemos$f(x) = \frac{[10f(x)]}{10} + \frac{f^2(x)}{10}$, com $0 \leq f^2(x) < 1$, de modo que

$$x = \frac{[10x]}{10} + \frac{[10f(x)]}{10^2} + \frac{f^2(x)}{10^2}$$

Se $0 = f^2(x)$, o processo para. Caso contrário, aplicamos novamente f para obter $f^2(x) = \frac{[10f^2(x)]}{10} + \frac{f^3(x)}{10}$ e

$$x = \frac{[10x]}{10} + \frac{[10f(x)]}{10^2} + \frac{[10f^2(x)]}{10^3} + \frac{f^3(x)}{10^3}$$

Continuando este processo, por indução, teremos a seguinte expansão

$$x = \frac{[10x]}{10} + \frac{[10f(x)]}{10^2} + \frac{[10f^2(x)]}{10^3} + ... + \frac{f^k(x)}{10^k}$$

A essa altura, várias propriedades podem ser verificadas:

- Como $0 \leq f^k(x) < 1$, fazendo $a_{j+1} = [10 f^j(x)] \in \mathbb{N}$, temos a aproximação
$$0 < [x - \frac{a_1}{10} - \frac{a_2}{10^2} - \frac{a_3}{10^3} - ... - \frac{a_k}{10^k}] \leq \frac{1}{10^k}$$

- x é um *ponto periódico*, isto é, existe um inteiro positivo n tal que $f^n(x) = x$ se e somente se x é uma dízima periódica simples.

- Por outro lado, se $x = 0, b_1 b_2 .. b_m \overline{a_1 a_2 .. a_n}$ se e somente se $y = f^m(x)$ é um ponto periódico. Neste caso, chamamos o ponto x de *pré-periódico.*

- Um número $x \in (0,1)$ é racional se e somente se x é um ponto pré-periódico de f.

2 Que tal fazer a expansão em outras bases?

O procedimento usado na seção anterior pode ser repetido para qualquer número inteiro n.

Por exemplo, a expansão binária (base dois) é obtida pela iteração da função $T_2(x) = 2x - [2x]$.

Exercício: trace os gráfico de T_n para diversos valores de n.

Para o caso $n = 2$ acompanhe a oficina disponível em http;//www.ufmg.br/ sonia/verao2011caosbase2.pdf

Mais geralmente, se $n \in \mathbb{N}$, defina $T_n : [0,1] \to [0,1]$, $T_n(x) = nx - [nx]$.

Por exemplo, obtenha a expansão de $\frac{1}{5}$ na base 3.

- Trace os gráficos de T_2 e de T_3.

- Usando T_2, mostre que o intervalo $[0,1]$ é não enumerável.

- Mostre que para qualquer sequência de $0's$ e $1's$ existe um número real $x \in [0,1]$ cuja expansão na base dois é a sequência dada.

- Seja $K = \{x \in [0,1] | T_3^k(x) \notin (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \ \forall k \in \mathbb{N}\}$. Mostre que K é não enumerável.

3 A transformação de Gauss

Até agora usamos funções llneares por partes para interpretar a expansão de um número real em uma certa base como um sistema dinâmico. Usando novamente a função piso é possível obter uma expansão diferente.

Para $x \in (0,1)$, seja $G(x) = \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$ e ponha $G(0) = 0$, G é chamada a *transformação de Gauss*. Trace o gráfico de G. Para isso, analise as situações em que $[\frac{1}{x}] = n$

Quais as diferenças com relação aos casos anteriores que você pode notar?

- Infinitos ramos
- Inclinação da tangente cada vez mais acentuada
- G possui infinitos pontos fixos

Vamos imitar o que fizemos anteriormente, sempre parando quando obtivermos o valor 0.

Para $x \in (0,1)$ escreva $a_1 = [\frac{1}{x}]$ de modo que $G(x) = \frac{1}{x} - a_1$ ou $\frac{1}{x} = G(x) + a_1$. Isto é, $x = \frac{1}{a_1 + G(x)}$.

Se $G(x) \neq 0$ então, definindo $a_2 = [\frac{1}{G(x)}]$ a mesma expressão acima nos dá $G(x) = \frac{1}{a_2 + G^2(x)}$ ou seja

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + G^2(x)}}$$

Repetindo o processo, paramos quando para algum $k \in \mathbb{N}$ tivermos $G^k(x) = 0$ (quando isso ocorre?). Caso contrário prosseguimos, por recorrência, para ao obter a *expansão em frações contínuas* do número x:

$$\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \cdots}}}}$$

O tema *Frações Contínuas* é bem amplo e pode ser aprofundado nas referências [1] e [3].

Por exemplo, se denotamos $(\frac{p_n}{q_n}) = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \cdots \frac{1}{a_n}}}}}$, então a sequência $(\frac{p_n}{q_n})$ é (em um certo sentido que diz respeito à limitação do denominador) a *melhor aproximação* do número x_0.

Verifique que um número $x \in [0,1]$ é racional se e somente se existe k tal que $G^k(x) = 0$ isto é, a expansão em frações contínuas de x é *finita*.

Na referência [2] encontra-se uma bela interpretação geométrica da aproximação por frações contínua de um número α em termos da aproximação da reta $y = \alpha x$ por retas de inclinação racional $y = (\frac{p_n}{q_n})x$.

Essa interpretação permite-nos estabelecer facilmente várias propriedades da sequências de aproximação, entre elas, a estimativa

$$|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{1}{q_n^2}$$

4.2: Se $x_0 = 0, a_1 a_2..a_n$ então a parte inteira de $10x_0$ é igual a a_1 e $x_1 = F(x_0) = 10x_0 - [10x_0] = a_1, a_2 a_3...a_n - a_1 = 0, a_2 a_3...a_n$.

O que dizer sobre os *pontos periódicos de* G ?

Antes de discutir essa questão, encontre expansão de $x_0 = \sqrt{2} - 1$. Para isso, observe que $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$ e $a_1 = [\frac{1}{x_0}] = 2$ e $G(x_0) = \sqrt{2} + 1 - 2 = \sqrt{2} - 1 = x_0$.

Podemos então escrever $x_0 = \frac{1}{2+x_0} = \frac{1}{2+\frac{1}{2+x_0}}$

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+...}}}}$$

Exercício: calcule os pontos fixos de G, isto é, todos os pontos tais que $G(x) = x$.

Exercício: prove que se x é um ponto periódico de G ou seja existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $G^k(x) = x$, se e somente se, x é raiz de um polinômio quadrático com coeficientes inteiros (ou seja, uma *irracionalidade quadrática*).

A recíproca deste resultado é válida:

Teorema (Lagrange) Se $x_0 \in (0,1)$ é uma irracionalidade quadrática, então x_0 é um ponto periódico da Transformação de Gauss.

Suponha que a, b, c sejam números inteiros tais que $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$. Seja $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ a sequência de convergentes para x_0. A ideia é provar que

1. Existem sequências de números inteiros $(a_n), (b_n)$ e (c_n) tais que $a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n = 0$.

2. As sequências são uniformemente limitadas, isto é, existe uma constante positiva M tal que $|a_n| \leq M$, $|b_n| \leq M$ e $|b_n| \leq M$.

3. Como essas sequências são formadas por números inteiros, cada sequência é *finita*. Logo, a sequência $(\frac{p_n}{q_n})$ é finita, pois cada polinômio de grau dois possui no máximo duas raízes.

4. Pelo princípio da casa do pombo, segue então que $(\frac{p_n}{q_n})$ é periódica.

A escavadeira de Cantor

Um exemplo muito interessante, e até certo ponto "simples", de dinâmica não linear é a seguinte função $f : [0,1] \to [0,1]$

$$f(x) = \{ \begin{array}{rl} 3x & se \;\; 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -3x+3 & se \;\; \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{array}$$

Observe que se $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$ então $f(x) > 1$ ou seja a imagem de x encontra-se fora do domínio da função. Isto implica que não podemos calcular $f(f(x)) = f^2(x)$. Assim sendo, para analisar a dinâmica da função f é necessário restringir o *domínio* de f para garantir a existência das sucessivas composições $f \circ f \circ f \circ ... \circ f$.

Isto é feito sucessivamente, restringindo-se cada vez mais o domínio. Será que sobra alguma coisa?

Por exemplo, o domínio de f^2 é $K_1 = \mathcal{D}(f^2) = \{x \in [0,1] |\ 0 \le f(x) \le 1\} = [0, \frac{1}{3}] \cup (\frac{2}{3}, 1]$. Ou seja $\mathcal{D}(f^2)$ é obtido removendo-se o intervalo do meio, após dividir o intervalo inicial em três partes iguais.

Para que $f^3(x)$ esteja definido, é necessário que $f(x) \in \mathcal{D}(f^2)$ ou seja, que $f(x) \in [0, \frac{1}{3}] \cup (\frac{2}{3}, 1]$. Resolvendo as desigualdades correspondentes, vemos que $K_2 = \mathcal{D}(f^3) = [0, \frac{1}{3^2}] \cup [\frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^2}] \cup [\frac{6}{3^2}, \frac{7}{3^2}] \cup [\frac{8}{3^2}, 1]$.

Prosseguimos desse modo, em cada etapa obtemos que $\mathcal{D}(f^j)$ é a união de 2^{j-1} intervalos de comprimento $(\frac{1}{3})^{j-1}$.

Na etapa seguinte, dividimos cada intervalo I_n em três partes iguais e removemos o subintervalo do meio, restando assim dois intervalos de tamanho $\frac{1}{3} \times (\frac{1}{3})^{j-1}$.

Logo, na $(j+1)$-ésima etapa, restam 2^j subintervalos de comprimento $(\frac{1}{3})^j$ isto é,

$$\mathcal{D}(f^{j+1}) = \cup_{n=1}^{2^{j+1}} I_n^j$$

Concluímos assim que o subconjunto de pontos em que podemos definir qualquer iterado da função f é o *Conjunto de Cantor Ternário*

$$K = \cap_{j=1}^{\infty} \mathcal{D}(f^j)$$

Observe que $K \neq \emptyset$, por exemplo, $\frac{1}{3} \in K$.

Em geral esse tipo de propriedade decorre de um fato fundamental dos números reais, *a interseção de intervalos encaixados é sempre não vazia.*

Como $\mathcal{D}(f^j)$ é a união de 2^{j-1} intervalos disjuntos de comprimento $(\frac{1}{3})^{j-1}$ temos que a medida de $\mathcal{D}(f^j)$ é igual do que $(\frac{2}{3})^{j-1}$. Entretanto, $K \subset \mathcal{D}(f^j)$ para todo inteiro positivo j, vemos que medida de K satisfaz $m(K) \leq (\frac{2}{3})^{j-1}$. Isto é $m(K) = 0$.

Portanto, sob este aspecto K é pequeno.

Entretanto, não existem pontos isolados de K ou seja todo ponto de K é limite de uma sequência de pontos (distintos) de K.. Segue então que K é *não enumerável*.

Para obter uma representação dos elementos de K podemos usar as expansão na base 3, descrita anteriormente.

Seja $K' = \{x \in [0,1] | T_3^k(x) \notin (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}),\ \forall k \in \mathbb{N}\}$. Mostre que $x \in K'$ se e somente se a expansão de x na base 3 não possui 1 no numerador. Ou seja $x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + ...$ com $a_i \neq 1, \forall i$. Mostre que $K = K'$.

Exercício: Como é a dinâmica de f restrita a K?

Autosimilaridade do conjunto de Cantor

O objetivo dessa seção é exibir a autosimilaridade do conjunto de Cantor ternário. Essa propriedade é responsável pela estrutura "fractal" deste conjunto.

Definição: Dizemos que $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma *autosimilaridade* de razão $r > 0$ se $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|S(x) - S(y)| = r|x - y|$.

Exercício: descreva todas as autosimilaridades de $\mathbb{R}$.

Definição: Um conjunto $E \in \mathbb{R}$ é chamado *autosimilar* se existe um conjunto finito de similaridades $S_1, ..., S_m$, de mesma razão $r > 0$, tais que $E = \cup_{i=1}^n S_i(E)$.

Exemplo: Conjunto de Cantor Ternário é autosimilar.

Para ver isso, usamos a caracterização do conjunto de Cantor Ternário em termos da expansão na base 3.

Defina $S_1(x) = \frac{x}{3}$ e $S_2(x) = \frac{x+3}{3}$ autosimilaridades de razão $\frac{1}{3}$. Observe que $S_1([0,1]) = [0, \frac{1}{3}]$ e $S_2([0,1]) = [\frac{2}{3}, 1]$ e faça os gráficos de S_1 e S_2.

Afirmação: $K = S_1(K) \cup S_1(K)$.

De fato, $S_1(\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+...)=\frac{a_1}{3^2}+\frac{a_2}{3^3}+\frac{a_3}{3^4}+...$ e $S_2(\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+...)=\frac{2}{3}+\frac{a_1}{3^2}+\frac{a_2}{3^3}+\frac{a_3}{3^4}+....$

Dessa forma, se $a_i \neq 1, \forall i \in \mathbb{N}$ na expansão ternária de um número x então o mesmo ocorre na expanão de $S_1(x)$ e de $S_2(x)$. Isto significa que $S_1(K) \cup S_2(K) \subset K$.

Observe agora que se $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \in K$ então, se $a_1 = 0$, temos $x = S_1(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^{i-1}})$. Se $a_1 = 2$, temos $x = S_2(\sum_{i=i}^{\infty} \frac{a_{i+1}}{3^i})$. O que prova que $K \subset S_1(K) \cup S_2(K)$.

Podemos iterar esse processo a partir da igualdade $K = S_1(K) \cup S_2(K)$ e aplicar novamente as funções S_1 e S_2 para escrever, usando o argumento acima,

$$K = S_1 \circ S_1(K) \cup S_1 \circ S_2(K) \cup S_2 \circ S_1(K) \cup S_2 \circ S_2(K)$$

E assim por diante, para obter para cada inteiro positivo n, $K = \bigcup S_{a_1} \circ S_{a_2} \circ ... \circ S_{a_n}(K)$, com $a_i \in \{1, 2\}$.

De fato, similaridades em geral servem para contruir conjuntos de Cantor.

Em [4] é demonstrado o seguinte: suponha que $S_1, S_2, ..., S_n$ sejam similaridades de razão $r < 1$, com uma pequena hipótese adicional. Então exsite um único conjunto E,compacto, tal que $E = \bigcup_1^n S_i(E)$.

Conjuntos autosimilares em geral têm medida nula e para distingui-los é necessária a introdução de outras forma de medir. Uma delas é a dimenão de Hausdorff cuja ideia daremos aqui apenas para o Conjunto de Cantor Ternário.

Sejam $I_1, I_2, ..., I_{2^n}$ os subintervalos de tamanho $\frac{1}{3^n}$ que *cobrem* K_n. Fixado $\alpha > 0$ calcule

$$\sum_1^{2^n} |I_j|^\alpha = \sum_1^{2^n} (3^{-n})^\alpha = 2^n.3^{-n\alpha}$$

Usando a definição $x^k = e^{klog(x)}$, $\forall x > 0$, temos $2^n.3^{-n\alpha} = e^{n(ln(2)-\alpha ln(3))}$.

Portanto, se $n[ln(2) - \alpha ln(3)] > 0$ ou seja o expoente é positivo e a exponencial diverge ou $lim_{n\to\infty} e^{n(ln(2)-\alpha ln(3))} = \infty$.

Por outro lado, se $n(ln(2) - \alpha ln(3)) < 0$ então a exponencial converge a zero. Logo, o valor $\alpha = \frac{ln(2)}{ln(3)} = log_3 2$ é um valor especial associado ao Conjunto de Cantor Ternário, a sua *dimensão de Hausdoff*.

Falando vagamente, o expoente α detecta um pouco mais refinadamente o "tamanho" do conjunto. Conjuntos autosimilares geralmente têm dimensão fracionárias (são fractais). Para uma boa exposição sobre a dimensão de Hausdorff de conjuntos autosimilares veja [4].

Outros conjuntos de Cantor

Observe que a construção do conjunto de Cantor Ternário abre uma ampla possibilidade de contruir novos subconjuntos, com propriedades semelhantes (não enumerável e totalmente desconexo) por exemplo, dividindo-se o intervalo $[0, 1]$ em mais partes. Ou mesmo tomando-se proporções diferentes nas etapas.

Por exemplo, para todo $k \in (0, 1)$ é possível construir um conjunto de Cantor de medida $1 - k$ do seguinte modo.

Na primeira etapa, remova o intervalo central de tamanho $\frac{k}{2}$. Na etapa seguinte, remova de cada intervalo remanescente um intervalo de comprimento $\frac{k}{2^3}$. Ficamos assim com uma união quatro subintervalos de tamanho com medida total igual a $1 - \frac{k}{2} - \frac{k}{2^2}$.

Na etapa seguinte, de cada subintervalo restante, removemos um intervalo central de comprimento igual a $\frac{k}{2^5}$, restando um subconjunto de medida $1 - \frac{k}{2} - \frac{k}{2^2} \frac{k}{2^3}$.

Dessa forma, compensamos o crescimento exponencial do número de subintervalos com o uma proporçõ cada vez menor do comprimento desses intervalos.

Em termos da nossa "escavadeira", utilizamos, em cada etapa, funções do tipo tenda com o dobro da inclinação anterior. Obtendo sucessivamente a remoção de 2^n subintervalos de comprimento $\frac{k}{2^{n+1}}$. Portanto, o conjunto remanescente tem medida igual a $1 - \frac{k}{2} - \frac{k}{2^2} \frac{k}{2^3} - ... - \frac{k}{2^n} = 1 - k(\frac{1}{2^{n+1}} - 1.$

Segue então que a medida do subconjunto de Cantor obtido é igual a $1 - k$.

Usando a soma de uma progressão geométrica prova-se quea medida de nesse novo conjunto de Cantor é igual a $1 - k$.

Obtém-se assim um subconjunto de medida positiva que não contém intervalos, ou seja, um subconjunto totalmente desconexo de medida positiva.

Referências:

[1] Diaz,L., Jorge,D.R.;Uma introdução aos sistemas dinâmicos via frações contínuas,XXVI CBM 17, 2007

[2] Klein,F. Matem'atica Elementar do Ponto de Vista Superior-Vol. 1 -Aritmética , SPM,2009

[3] Moreira,C.G., Conjuntos de Cantor, bifurcações dinâmicas e aproximações diofantinas 22.o Colóquio Brasileiro de Matemática e outros textos de mini-cursos.

[4] Shah ,J.; Hausdorff Dimension and its applications, U.of Chicago,2009, http://www.uchicago.edu/ may/VIGRE/VIGRE2009?REUPapers/Shah.pdf

[5] Pinto de Carvalho,S.P. e Oliffson Kamphorst S., Caos na base 2, http://www.ufmg.br/ sonia/proof.pdf.