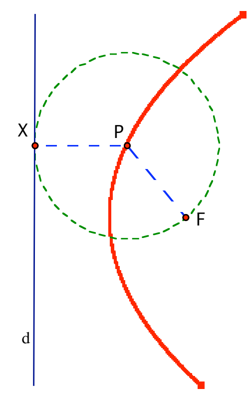
Caracterizações das cônicas

Profa. Elvia Mureb Sallum IME-USP

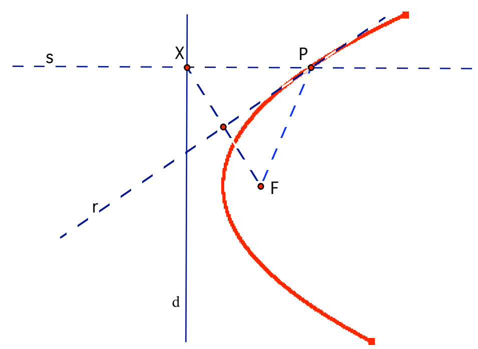
Neste texto serão apresentadas várias caracterizações das cônicas. Algumas delas permitirão justificar o funcionamento de diferentes aparatos que as desenham.

Parábola Dados uma reta d e um ponto F $\notin$ d, a *parábola de foco F e diretriz d* é o L.G. dos pontos P tais que d(P,F) = d(P,d) ou, equivalentemente, dos centros P das circunferências que passam por F e são tangentes a d .

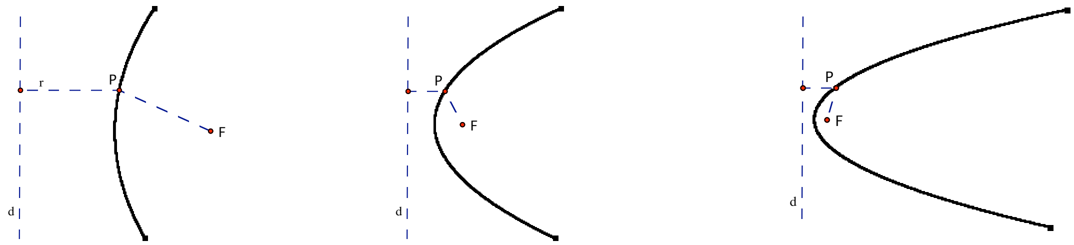


Construção de parábola, ponto a ponto, com régua e compasso.

Por um ponto X $\in$ d, trace a perpendicular s à reta d e a mediatriz r do segmento XF. O ponto P da intersecção de r e s descreve a parábola quando X percorre d. *Explique*.

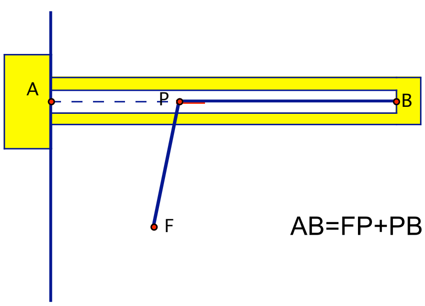


Exercício 1 Na figura abaixo vemos a variação da parábola quando F se aproxima ou se afasta da diretriz d. Para onde tendem as parábolas quando F se aproxima da diretriz? E como variam quando F se afasta? Quem seria a curva caso F $\in$ d?



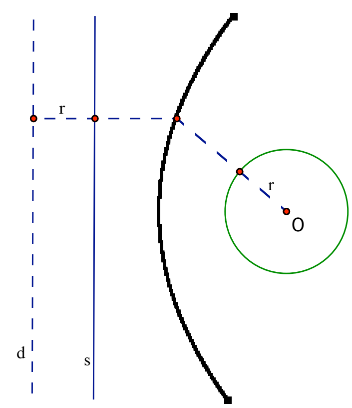
Mecanismo de fio esticado para traçar parábolas

Para o traçado contínuo de uma parábola, usa-se um fio e uma régua em T com uma abertura longitudinal AB. Amarre um barbante, de comprimento AB com uma das pontas presa em B e a outra fixada no

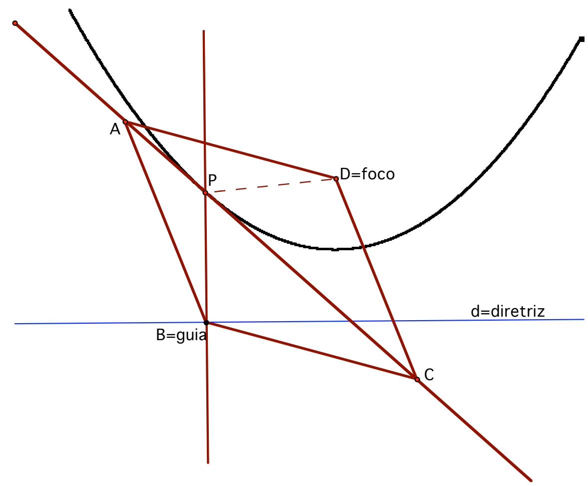


ponto F da mesa, F $\notin$ d. Um lápis mantendo o barbante esticado enquanto o T escorrega pela reta d, desenha uma parábola de diretriz d e foco F. *Justifique*. E se o comprimento do barbante for diferente de AB?

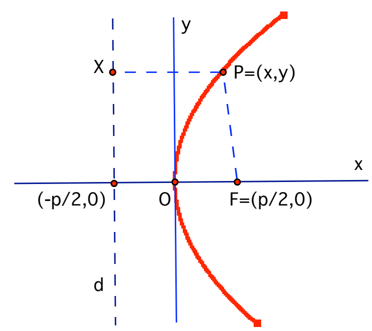
Exercício 2 Na figura temos uma reta s e uma circunferência γ de centro O e raio r. *Mostre* que o L.G. dos pontos eqüidistantes de s e de γ é uma parábola.



Parabológrafo Na figura abaixo, ABCD é um losango articulado nos vértices, com D fixado numa placa e B correndo numa canaleta d. Uma régua de comprimento suficientemente grande, suporte da diagonal AC do losango, e outra, fixada em B e mantida perpendicular à d, encontram-se num ponto P. Como AC é a mediatriz de BD e P ∈ AC tem-se PB = PD. Assim, ao movimentar o aparato com B percorrendo a canaleta d, um lápis no ponto P desenha uma parábola de diretriz d e foco D.



Equação reduzida da parábola de foco F e diretriz d Dada uma pará--bola de foco F e diretriz d, seja p = d(F,d) > 0. Considere um sistema de coordenadas em que F = (p/2,0) e d é a reta x = - p/2. Uma *terceira caracterização da parábola* pode ser dada pela sua equação reduzida. Assim, P = (x,y) ∈ parábola ⇔



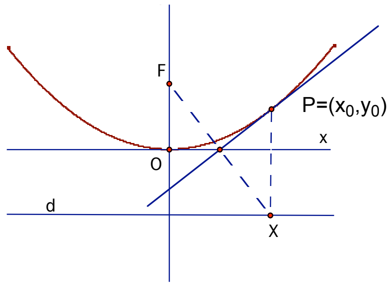
$$| x+\frac{p}{2} | = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2} \Leftrightarrow (x+\frac{p}{2})^2=(x-\frac{p}{2})^2+y^2 \Leftrightarrow y^2=2px$$

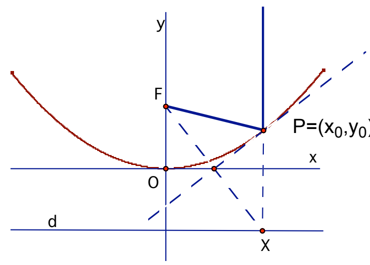
Exercício 3 Determine

a) o foco, a diretriz e o esboço das parábolas $y = 2x^2$ e $y + 2 = 2(x - 1)^2$

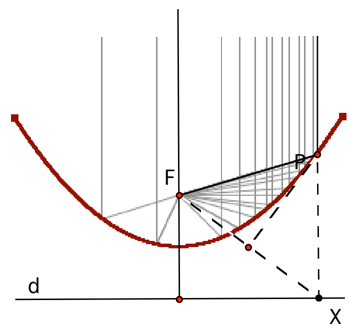
b) o esboço e a equação da parábola de foco (1,2) e diretriz y = x ;

Reta tangente à parábola Considere uma parábola em que a d(F,d) = 2c > 0. Considerando um sistema de coordenadas conveniente podemos mostrar que para cada X ∈ d a *mediatriz de XF é a reta tangente* à curva no ponto correspondente P, que essa tangente deixa o resto da curva de um único lado e que ela é a única reta que passa por P com essa propriedade.

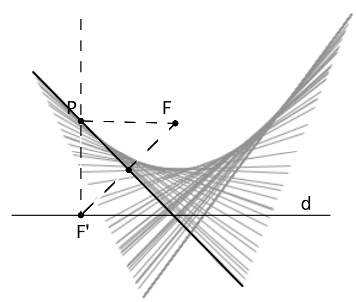




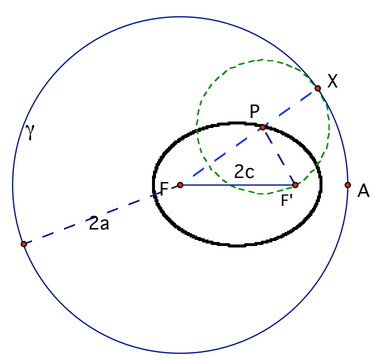
Refletor parabólico Os raios de luz de uma lâmpada no foco F de um espelho parabólico refletem paralelamente ao eixo da curva. Justifique levando em conta que o ângulo entre o raio incidente e a reta tangente é igual ao ângulo entre essa reta e o raio refletido.



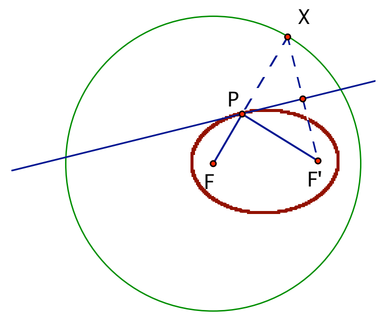
Parábola com dobradura Numa folha transparente desenhe uma reta d e um ponto F $\notin$ d. Dobre a folha de modo que F fique sobre d. Faça isso de muitas maneiras e veja aparecer uma parábola. *Explique*



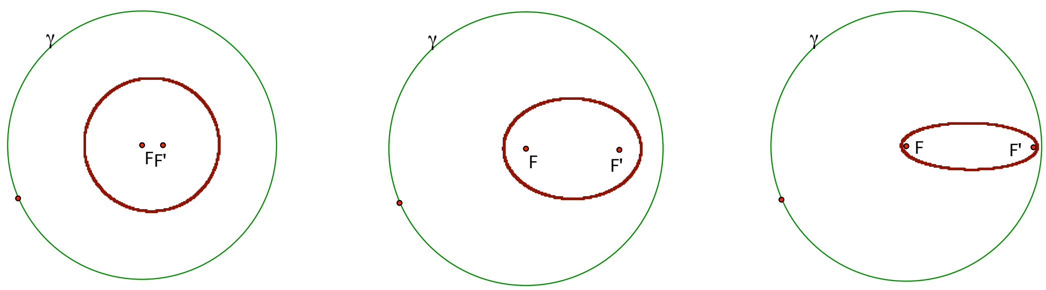
Elipse Dados uma circunferência γ = C(F,2a) e um ponto F', 0 < FF' = 2c < 2a, a *elipse* de *focos* F e F' e *excentricidade* e = c/a < 1 é o L.G. dos pontos P tais que PF + PF' = 2a, ou seja, dos centros P das circunferências tangentes a γ que passam por F'.



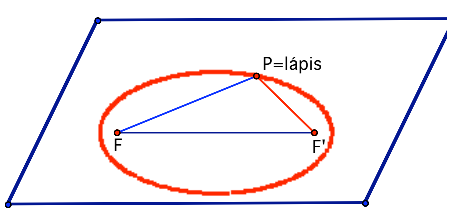
Construção da elipse, ponto a ponto, com régua e compasso Nas notações acima, para cada X ∈ γ trace a interseção P da mediatriz de XF’ com o raio XF de γ. Quando X percorre γ o ponto P descreve a elipse. *Justifique*.



Exercício 4 Abaixo vemos elipses quando o foco F’ se aproxima de F ou da circunferência γ. Para onde tende a elipse quando F’→ F? E sua excentricidade? E se F' tender a γ? Quem seria a curva, se c = a?



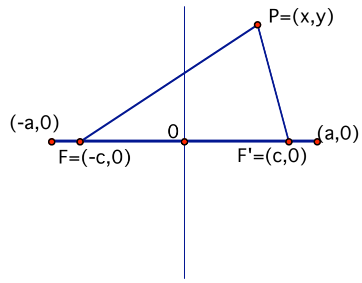
Mecanismo de fio esticado para traçar elipses O seguinte aparato permite o traçado contínuo da elipse dados os focos F e F’ com FF’= 2c e a excentricidade e < 1. Seja uma placa, com dois pinos F e F’ fixados tais que FF’ = 2c, e um fio flexível de comprimento 2a com a = c/e.

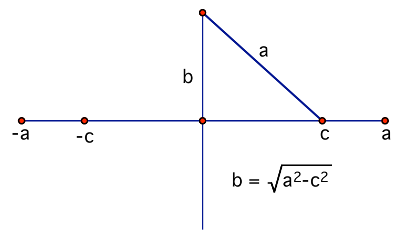


PF+PF'=2a

Fixe as extremidades do fio em F e F' e movimente um lápis mantendo o fio esticado. Ele desenhará os pontos P da elipse de focos F e F' e excentricidade e. Justifique.

Equação reduzida da elipse Considere uma elipse de focos F e F’ com FF’ = 2c e excentricidade e = c/a < 1. Colocando um sistema de coordenadas em que F = (- c,0) e F' = (c,0), um ponto P = (x,y) pertence à elipse se e só se





(0) $PF + PF' = 2a \quad \Leftrightarrow$

(1) $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \quad \Leftrightarrow$

(2) $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \Rightarrow$

(3) $(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow$

(4) $a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \Rightarrow$

(5) $a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2((x+c)^2 + y^2) \quad \Leftrightarrow$

(6) $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \quad \Leftrightarrow$

(7) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad \Leftrightarrow$

(8) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}$

Para ver que vale a recíproca, isto é, que se P = (x,y) obedece (8), então, PF + PF' = 2a, só falta mostrar que (5) ⇒ (4) e (3) ⇒ (2).

Supondo que vale (5) (logo vale (8)), como 0 < c < a, temos

$-a \le x \le a \quad \Leftrightarrow \quad -ac \le cx \le ac \quad \Leftrightarrow \quad 2a^2 > a(a+c) \ge a^2 - cx \ge a^2 - ac > 0$.

Assim, como $a^2 - cx > 0$ segue (5) ⇒ (4).

De (4) e $2a^2 > a^2 - cx > 0$, segue $0 < \dfrac{a^2 - cx}{a} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \le 2a$.

Portanto (3) $\Rightarrow$ (2).

Assim, temos *outra caracterização da elipse*:

A elipse de focos F = (-c,0) e F' = (c,0) e excentricidade 0 < e < 1 é o conjunto dos pontos (x,y) do plano cartesiano tais que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \text{com} \quad a = c/e \;, \; b = a\sqrt{1-e^2}\,.$$

Observando que $c^2 + b^2 = a^2e^2 + a^2 - a^2e^2 = a^2$ podemos facilmente localizar os focos de uma elipse no seu eixo maior conhecendo sua equação reduzida.

Exercício 5 Supondo 0 < a < b esboçar a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e localizar seus focos.

Exercício 6 Determinar

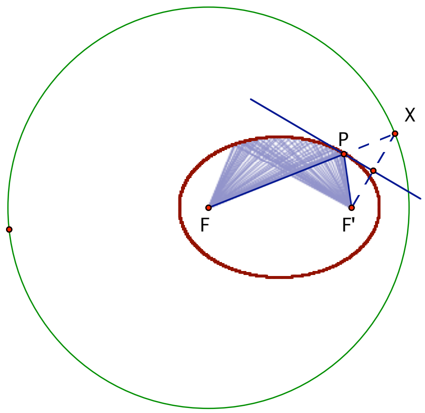
a) Os esboços e os focos das elipses $3x^2 + 4y^2 = 9$, $9x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + 2x + 3y^2 = 10$.

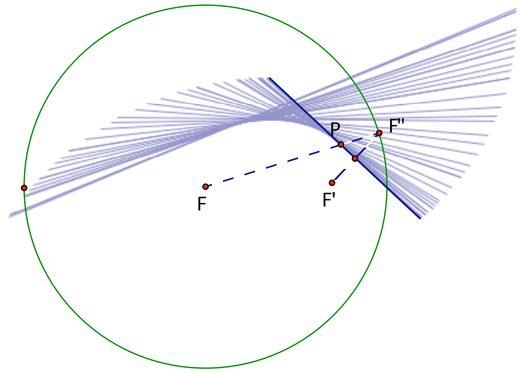
b) A equação da elipse de focos (1,0) e (0,1) e excentricidade $e = \sqrt{2}/2$.

Exercício 7 Se F = (-1,0) e F' = (1,0) achar o conjunto dos P = (x,y) tais que

a) d((F,P) + d((F',P) = 2; b) d((F,P) + d((F',P) = 1

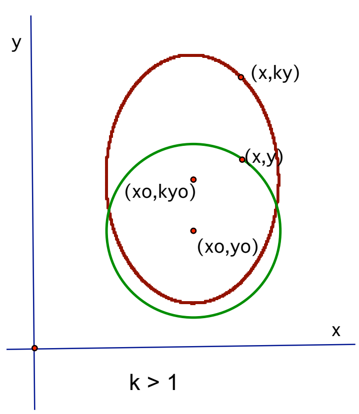
Reta tangente à elipse Como no caso da parábola, usando um sistema de coordenadas conveniente, podemos mostrar que, para cada ponto X $\in \gamma$, a *mediatriz de XF'* é a reta tangente à elipse no ponto correspondente P, que ela corta a curva somente em P e deixa o resto da elipse num mesmo semiplano. Além disso, todo raio saindo de um foco da elipse e incidindo na mesma reflete atingindo o outro foco.

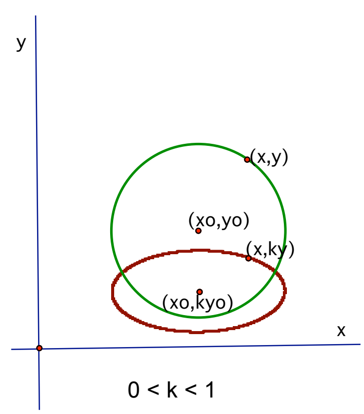




Elipse com dobradura Numa folha transparente desenhe uma circunferência de centro F e um outro ponto F' no seu interior. Dobre a folha de modo que F' coincida com algum ponto da circunferência para muitos pontos da circunferência. Veja aparecer uma elipse. *Explique*.

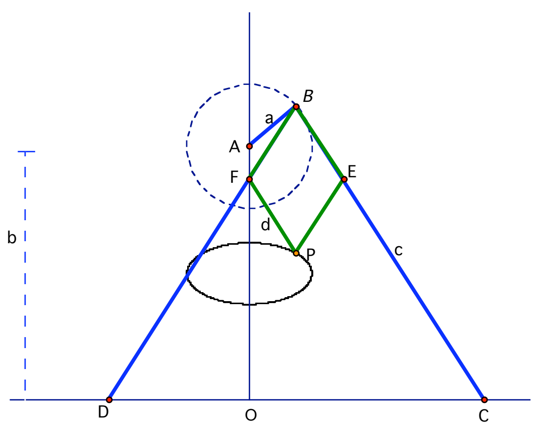
Elipse obtida de uma circunferência por uma compressão Uma compressão (ou dilatação) paralela a uma reta t transforma uma circunferência γ em uma elipse. Assim, considere um sistema de coordenadas no qual a circunferência γ: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ e t // eixo oy. Se k é uma constante tal que $0 \neq k \neq 1$ *mostre* que $(x,y) \in \gamma$ se e só se $(X,Y) = (x, ky)$ pertence à elipse de equação $\dfrac{(X - x_0)^2}{r^2} + \dfrac{(Y - k.y_0)^2}{(k.r)^2} = 1$. *Localize* seus focos.

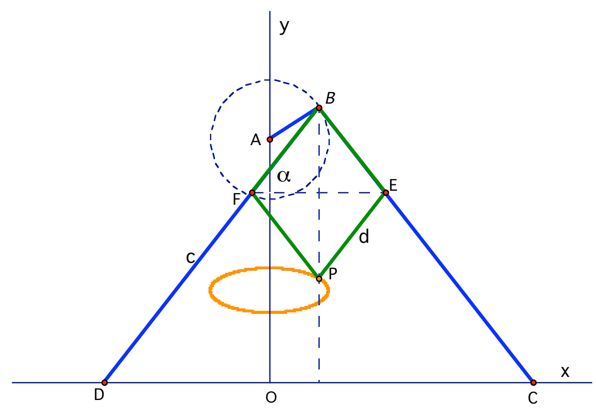




Exercício 8 Nas notações anteriores, mostre também que (x,y) $\in \gamma$ se e só se (X,Y) = (x,y_0 + k(y – y_0)) pertence à elipse de equação $\dfrac{(X-x_0)^2}{r^2}+\dfrac{(Y-y_0)^2}{(k.r)^2}=1$. Interprete. Localize os focos.

Mecanismo articulado de 5 varetas para traçar elipses Na figura, vemos um aparato com 5 varetas articuladas, em que BEPF é um losango de lado d, a extremidade A da vareta AB está fixada (mas pivota) numa placa, e C, D movimentam-se numa canaleta quando B percorre a circunferência C(A, a) de centro A e raio AB = a.





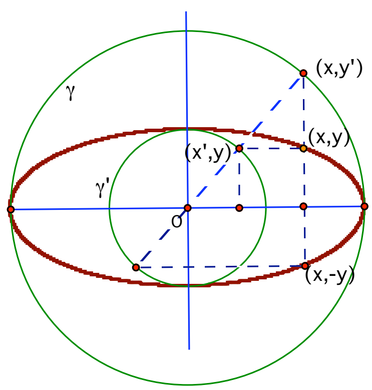
No sistema de coordenadas da figura, quando B = (x,y) varia na circunferência de centro A e raio a, o ponto P = (X,Y) muda obedecendo

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - BP = y - 2dsen\alpha = y(1-\dfrac{2d}{c}) \end{cases}$$

ou seja, P é obtido de B = (x,y) por uma compressão na vertical e, portanto, descreve uma elipse. *Justifique* as afirmações e localize seu centro e focos. **Observar** a variação das curvas descritas por P com o lado d do losango.

Elipse determinada por 2 circunferências concêntricas

Considere um sistema de coordenadas e as circunferências γ = C(O,a) e γ' = C(O,b) como na figura abaixo com a > b. Para cada (x,y') $\in$ C(O,a) seja (x',y) o ponto de interseção do segmento de extremidades O e (x,y') com a circunferência C(O,b). O ponto P = (x,y) é obtido de (x,y') por uma compressão paralela ao eixo oy já que



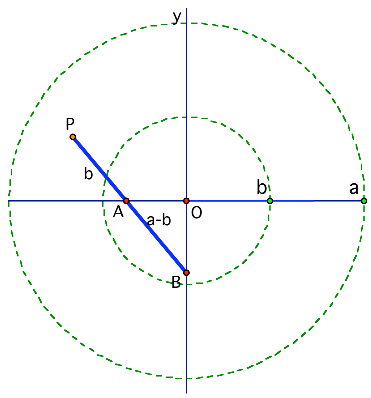
$\frac{y'}{y} = \frac{a}{b}$, logo pertence à elipse dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Reciprocamente, todo ponto dessa elipse é obtido, como acima, de algum ponto (x,y') $\in \gamma$.

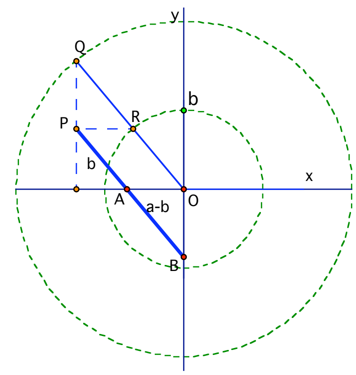
Exercício 9 Determine a equação, os focos e o esboço da elipse obtida a partir das circunferências

a) $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 3$; b) $x^2 + y^2 - 2y = 0$ e $x^2 + y^2 - 2y = 1$.

Mecanismo de 1 vareta para traçar elipses

O mecanismo tem duas canaletas perpendiculares que, na figura, correspondem aos eixos ox e oy, e uma vareta com pinos em A e em B de modo que o pino B desliza numa canaleta e A desliza na outra. Se P é um ponto dessa vareta tal que P – A – B com PA = b, PB = a, ao movimentar o mecanismo, um lápis em P desenha uma elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. *Justifique.* Observar que o lápis entre A e B também desenha uma elipse.

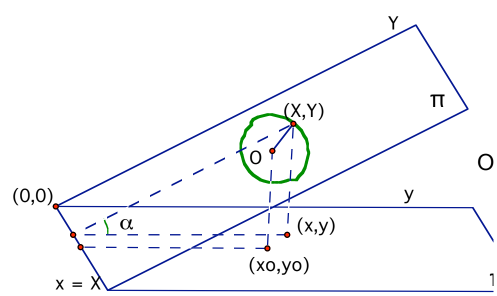




Exercício 10 Os planos π e π' cortam-se numa reta t determinando um ângulo diedral de medida α, $0 < \alpha < 90°$. Mostre que a projeção (ortogonal) de uma circunferência de um plano no outro é uma elipse, localizando seus focos e sua excentricidade. Sugestão: Na figura o ponto

$O = (X_0,Y_0)$ e o ponto (X,Y) obedece $(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 = R^2$. Sua projeção ortogonal (x,y) é dada por

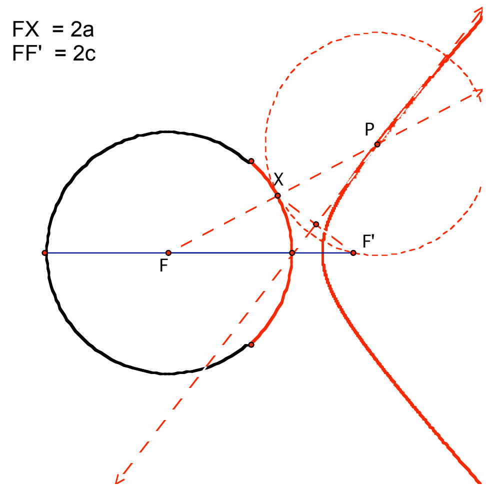
$$\begin{cases} x = X \\ y = Y\cos\alpha \end{cases}.$$

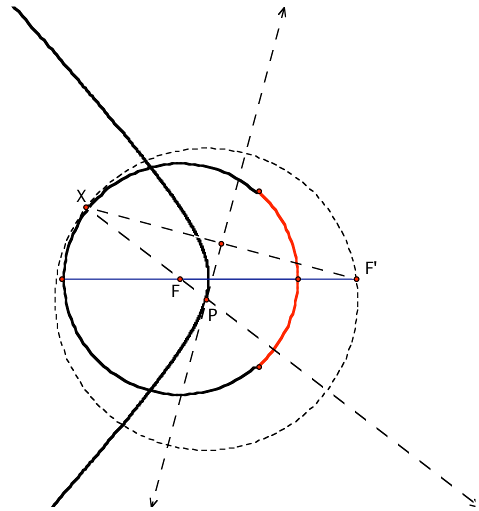


Seções planas de cilindro circular reto. A seção de um cilindro circular reto por um plano fazendo um ângulo α, $0 < \alpha < 90°$, com o plano da base é uma elipse. *Justifique*. E se $\alpha = 0°$ ou $90°$?

Exercício 11 A seção de uma esfera por um plano passando pelo seu centro é uma circunferência de raio máximo e sua projeção sobre um plano é uma elipse, uma circunferência ou um segmento. *Justifique.*

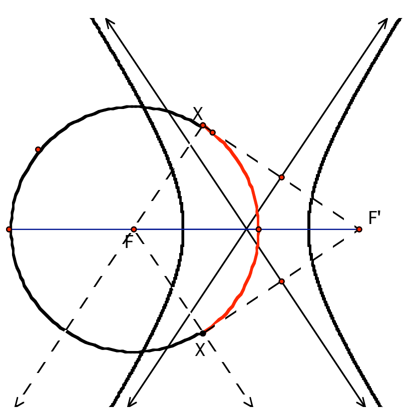
Hipérbole Dados uma circunferência $\gamma = C(F,2a)$ e um ponto F' com FF' = 2c > 2a, a *hipérbole de focos* F e F' e *excentricidade* e = c/a > 1 é o L.G. dos pontos P tais que | PF - PF' | = 2a ou, equivalentemente, dos centros P das circunferências tangentes a γ, que passam por F'.



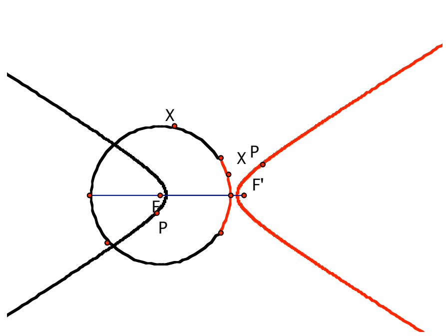


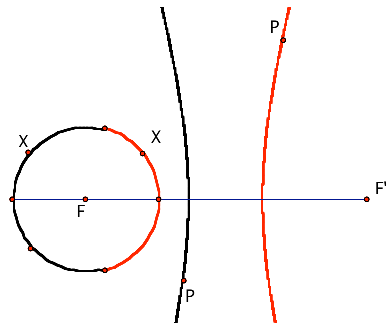
Construção de hipérbole, ponto a ponto, com régua e compasso

Dados uma circunferência γ = C(F,2a) de centro F e raio 2a e um ponto F' com FF' = 2c > 2a, *mostre* que a hipérbole de focos F e F' e excentricidade e = c/a > 1 é o L.G. dos pontos P que são interseções das mediatrizes de XF' com com as retas FX para todos os *possíveis* pontos X de γ. Use isso para construir vários pontos da curva. Identifique os 2 pontos em que essa construção não é possível: para eles a mediatriz de XF' é paralela a XF. Essas 2 mediatrizes são as *assíntotas* da hipérbole.



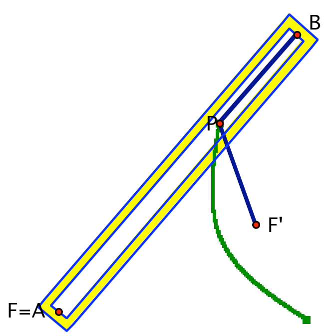
Observar a variação das hipérboles quando F e γ estão fixados e F' afasta-se ou aproxima-se de γ e a distância entre os vértices.





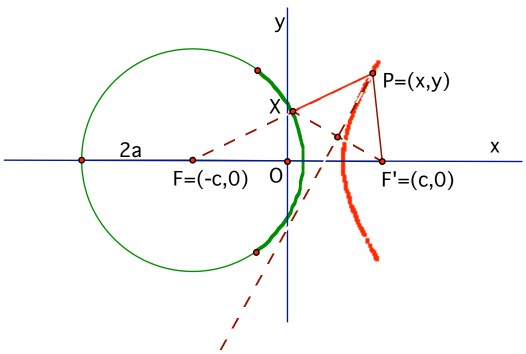
Mecanismo de fio esticado para traçar hipérbole

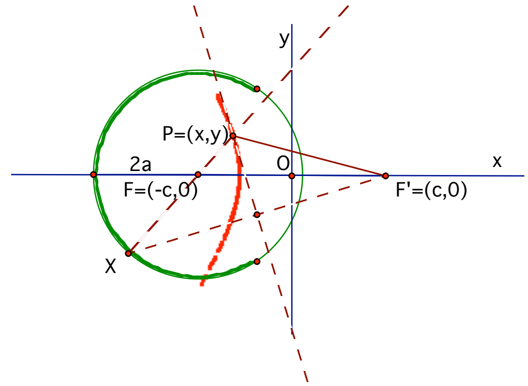
Os pinos F e F' estão fixados numa placa. Uma régua com abertura AB tem a extremidade A fixada, mas pivota, em F. Um fio flexível de comprimento ℓ, $0 < AB - FF' < \ell < AB$, tem as extremidades presas em B e em F'. Mostre que, um lápis mantendo o fio esticado desenha um



ramo da hipérbole de equação $| PF - PF' | = AB - \ell = 2a < FF' = 2c$. Observe, na figura, que $AB - \ell = PF - PF'$. Mude o comprimento ℓ do fio e observe como mudam as hipérboles!

Equação reduzida da hipérbole Seja um sistema cartesiano em que os focos são $F = (-c,0)$, $F' = (c,0)$ e $\gamma = C(F,2a)$ com $0 < a < c$.





(0) $P = (x, y)$ pertence à hipérbole $\Leftrightarrow$

(1) $|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a \quad \Leftrightarrow$

(2) $(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 = 4a^2 \quad \Leftrightarrow$

(3) $x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \Rightarrow$

(4) $(x^2 + y^2)^2 + (c^2 - 2a^2)^2 + 2(x^2 + y^2)(c^2 - 2a^2) = ((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2) \quad \Leftrightarrow$

(5) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$

Para ver que se P = (x,y) obedece (5), com c > a, então, ele pertence à hipérbole basta observar que

$$x^2 + y^2 = a^2\left(1 + \frac{y^2}{c^2 - a^2}\right) + y^2 \geq a^2 > a^2 - (c^2 - a^2) = 2a^2 - c^2 \quad \Rightarrow$$
$$x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2 \geq 0$$

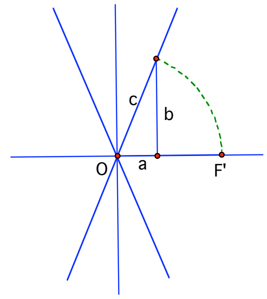
Observação Na hipérbole acima os pontos (a,0) e (- a,0) são seus *vértices* e os eixos coordenados são seus *eixos*. Localiza-se os focos (-c,0) e (c,0) de uma hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, observando que $c^2 = a^2 + b^2$.

Exercício 12 Esboçar a hipérbole e localizar seus focos

a) $x^2 - y^2 = 1$;

b) $4x^2 - 2y^2 = 8$;

c) $y^2 - 2x^2 = 2$



Exercício 13 Dar o esboço e a equação da hipérbole com excentricidade $e = \sqrt{2}$ e focos $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

Exercício 14 Dados F = (-1,0) e F' = (1,0) determine o conjunto dos pontos P = (x,y) tais que:

a) | d(F,P) - d(F', P) | = 2;

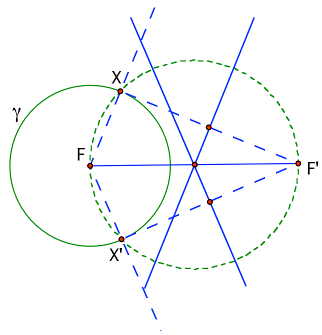
b) | d(F,P) - d(F',P) = 1.

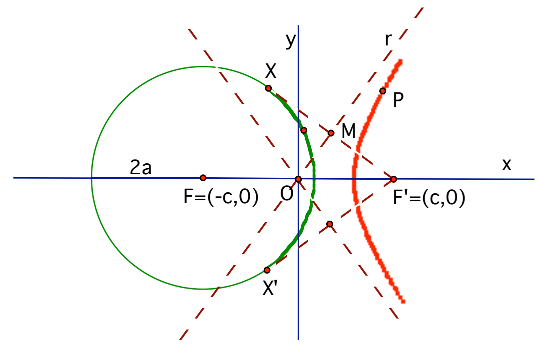
Equações das assíntotas Vejamos como são as assíntotas da hipérbole de focos F = (-c,0) e F' = (c,0) cuja distância entre seus vértices é 2a.

Sejam X, X' $\in \gamma$ tais que XF' e X'F' são tangentes a γ. Eles são obtidos pela interseção das circunferências $(x + c)^2 + y^2 = 4a^2$ e $x^2 + y^2 = c^2$, logo $X, X' = (\frac{2a^2 - c^2}{c}, \pm \frac{2a}{c}\sqrt{c^2 - a^2})$. Os pontos médios de XF e XF' são dados por $M = (\frac{a^2}{c}, \pm \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - a^2})$. Assim, as assíntotas são as retas

$$r: \ y = \pm \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a} x \ = \ \pm \frac{b}{a} x.$$

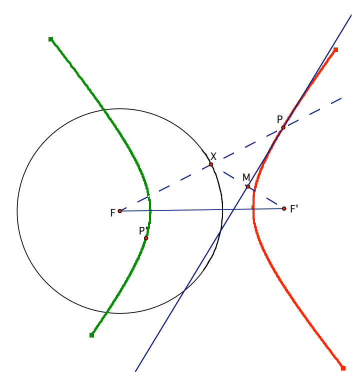
Quando a = b a hipérbole é chamada *equilátera.*



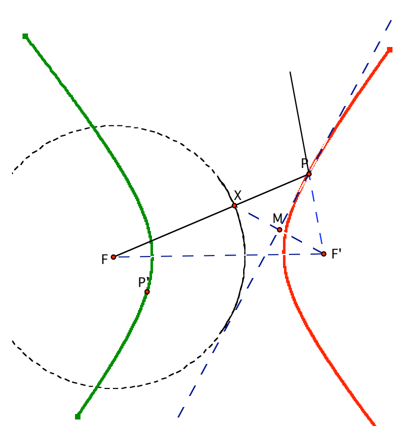


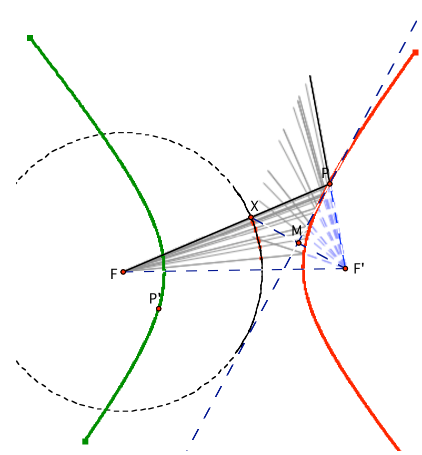
Exercício 15 Verifique se as hipérboles $x^2 - y^2 = 1$ e $xy = 1$ são equiláteras e determine as assíntotas, os focos, a excentricidade e os esboços.

Reta tangente à hipérbole Nas notações da construção da hipérbole, ponto a ponto, podemos mostrar que, para todo ponto X de γ (exceto 2 deles), a *mediatriz* de XF' é a *reta tangente* à hipérbole no ponto P e deixa os 2 ramos da curva em semiplanos distintos.

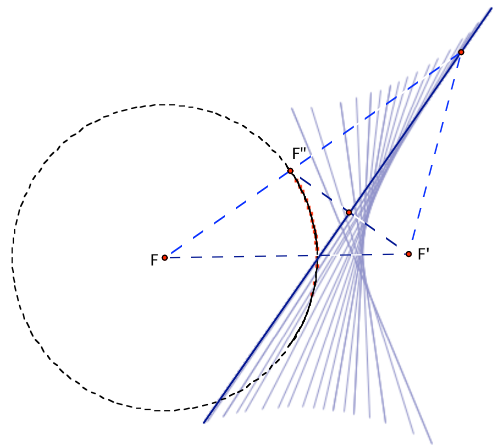


Refletor hipérbólico Todo raio saindo de um foco da hipérbole e incidindo no ramo oposto reflete numa direção que passa pelo outro foco. Justifique.





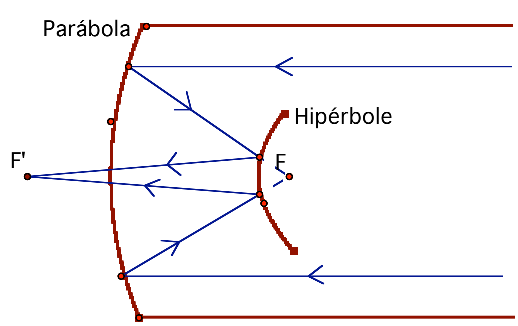
Hipérbole com dobradura Numa folha de papel transparente trace uma circunferência de centro F e um ponto F' no seu exterior.



Dobre a folha de modo que F' fique sobre um ponto X da circunferência. Faça isso para muitos pontos X da circunferência e veja aparecer uma hipérbole. *Explique*.

Telescópios refletores Como vimos antes os raios vindos de um corpo celeste (praticamente paralelos) refletem em um espelho parabólico no fundo de um tubo formando a imagem do corpo no foco F da parábola.

Como o olho do observador deveria estar em F para visualizar a imagem, coloca-se um espelho hiperbólico como na figura abaixo de modo que um dos focos da hipérbole coincida com o foco F da parábola. Assim, raios incidem na parábola e depois na hipérbole fazendo a imagem do corpo no outro foco F' da hipérbole, que é escolhido fora do tubo, onde deve se posicionar o olho do observador.



Caracterização de uma elipse por uma diretriz e um foco Dados uma reta r, um ponto $F \notin r$ e um número e tal que $0 < e < 1$, o conjunto dos pontos P (do plano determinado por F e r), tais que $e.d(P, r) = d(P,F)$ é uma elipse com excentricidade e, cujo eixo maior é perpendicular a r e que tem F como um dos focos. Nesse caso a reta r é uma *diretriz* da elipse.

Prova Seja um sistema de coordenadas tal que F = (c,0) e a reta r tem como equação x = d. Tem-se

$$P = (x, y) \text{ obedece } e.d(P,r) = d(P,F) \Leftrightarrow$$

$$e\,|\,x-d\,| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$(1-e^2)x^2 + y^2 + 2x(de^2 - c) + c^2 - e^2d^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(1-e^2)(x + \frac{de^2 - c}{1-e^2})^2 + y^2 = e^2d^2 - c^2 + \frac{(de^2-c)^2}{1-e^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$(x + \frac{de^2-c}{1-e^2})^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2(d-c)^2}{(1-e^2)^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{com} \quad x_0 = \frac{c - de^2}{1-e^2}, \quad a = \frac{e\,|\,d-c\,|}{1-e^2} \; > \; b = \frac{e\,|\,d-c\,|}{\sqrt{1-e^2}}$$

que é a equação de uma elipse de centro (x_0,0) cujo eixo maior é perpendicular à reta r, com focos F = (c,0) e F' = $(\frac{c + e^2(c-2d)}{1-e^2}, 0)$ e excentricidade e. *De fato*:

Como

$$c_1 = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{e^2\,|\,d-c\,|}{1-e^2}$$

a excentricidade da elipse é dada por

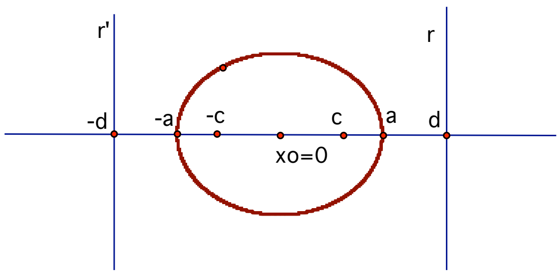
$$\frac{c_1}{a} = \frac{e^2\,|\,d-c\,|}{1-e^2} \cdot \frac{1-e^2}{e\,|\,d-c\,|} = e\,.$$

Quando d > c, os focos são

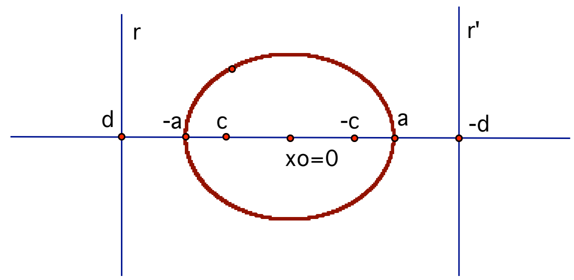
$$(x_0 + c_1, 0) = (c, 0) = F \;\; e \;\; (x_0 - c_1, 0) = (\frac{c + e^2(c - 2d)}{1 - e^2}, 0).$$

Nesse caso,

$2x_0 - d < x_0 - a < x_0 - c_1 < x_0$ e $x_0 + c_1 < x_0 + a < d$.



d > c



d < c

Quando d < c, os focos são

$$(x_0 + c_1, 0) = (\frac{c + e^2(c - 2d)}{1 - e^2}, 0) \;\; \text{e} \;\; (x_0 - c_1, 0) = (c, 0) = F$$

e temos $d < x_0 - a < x_0 - c_1$ e $x_0 + c_1 < x_0 + a < 2x_0 - d$.

Deixamos ao leitor mostrar que se r' é a reta simétrica de r com relação à reta $x = x_0$ então, e.d(P,r') = d(P,F') para todo ponto P da elipse.

Essas retas r e r' são as *diretrizes da elipse*.

Para completar a caracterização de uma elipse por uma diretriz e um foco ainda precisamos da seguinte

Proposição Dada uma elipse de focos F e F' com FF' = 2c e excentricidade e, 0 < e < 1, existem duas retas r e r', perpendiculares ao eixo maior, tais que e.d(P,r) = d(P,F), e.d(P,r') = d(P,F) para todo ponto P da elipse.

Prova Num sistema de coordenadas em que F = (c,0) e F' = (-c,0), todo ponto P = (x,y) da elipse obedece a equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{com} \quad a^2=\frac{c^2}{e^2} \quad \text{e} \quad b^2=c^2\frac{1-e^2}{e^2}.$$

Da demonstração da proposição e do exercício anteriores, como $x_0 = 0$, existem as retas r e r' sendo

$$r : x = d = \frac{c}{e^2} \text{ e } r' : x = -d = -\frac{c}{e^2} .$$

Observar que, nesse caso, d > a.

Observação As 2 proposições anteriores garantem que, dados uma reta r, um ponto F $\notin$ r e um número 0 < e < 1, podemos definir uma *elipse* como o conjunto dos pontos (x,y) tais que $\dfrac{d((x,y),F)}{d((x,y),r)}=e$.

Nesse caso a reta r é uma das 2 *diretrizes* da elipse.

Caracterização de uma hipérbole por uma diretriz e um foco. Dados uma reta r, um ponto F $\notin$ r e um número e > 1, o conjunto dos pontos P do plano (determinado por F e r) tais que e.d(P,r) = d(P,F) é uma hipérbole de excentricidade e, cujos vértices estão numa perpendicular à reta r e que tem F como um dos focos. Nesse caso a reta r é uma *diretriz* dessa hipérbole.

Prova Considere um sistema de coordenadas no qual F = (c,0) e a reta r: x = d. Tem-se:

$$P=(x,y) \text{ obedece } e.d(P,r) = d(P,F) \Leftrightarrow$$

$$e\,|\,x-d\,|=\sqrt{(x-c)^2+y^2} \Leftrightarrow$$

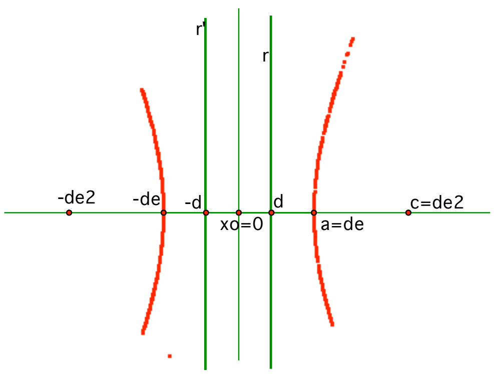
$$(e^2-1)x^2-y^2-2x(de^2-c)-c^2+e^2d^2=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(e^2-1)(x-\frac{de^2-c}{e^2-1})^2-y^2=\frac{e^2(d^2+c^2-2dc)}{e^2-1} \Leftrightarrow$$

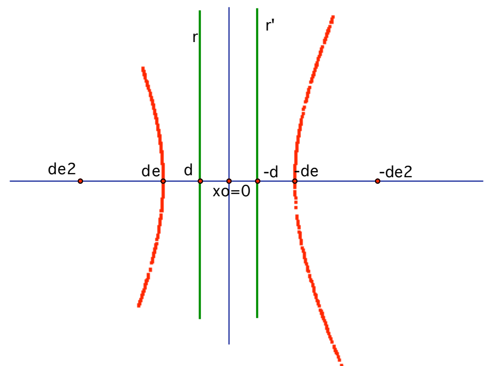
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{com} \quad x_0=\frac{de^2-c}{e^2-1}, \quad a=\frac{e\,|\,d-c\,|}{e^2-1} \quad \text{e} \quad b=\frac{e\,|\,d-c\,|}{\sqrt{e^2-1}}$$

que é a equação de uma hipérbole com excentricidade e, centro $(x_0,0)$, eixo perpendicular a r e que tem como focos

$$F=(c,0) \ \text{ e } \ (\frac{-c(1+e^2)+2de^2}{1-e^2},0) \ .$$



c > d



c < d

Reciprocamente temos a

Proposição Dada uma hipérbole de focos F, F' com FF' = 2c e excentricidade e > 1, existem exatamente 2 retas r e r' tais que e.d(P,r) = d(P,F) e e.d(P,r') = d(P,F') para todo ponto P da hipérbole. Nesse caso, r e r' são perpendiculares à reta FF' e são as *diretrizes da hipérbole.*

Prova Deixada ao leitor.

Observação Do que vimos acima, dados uma reta r e um ponto $F \notin r$ podemos definir *hipérbole* como o conjunto dos pontos P do plano tais que $\frac{d((x,y),F)}{d((x,y),r)}=e$, e constante >1

Nesse caso a reta r é uma das 2 *diretrizes* da hipérbole.

Observação As figuras foram elaboradas no *Sketchpad*.

Referências Bibliográficas

1. ÁVILA, G.A. *Hipérbole e os telescópios*, RPM nº 34 (22-27), 1997
2. CUNDY, H.M.; ROLLET, A.P. *Mathematical models*, Oxford, 1961
3. DORRIE, H. *100 Great Problems of Elementary Mathematics: their history and solutions*. N. York: Dover, 1958.
4. HADAMARD, J. *Léçons de Geométrie Elémentaire*. Paris: Colin, 1929
5. HADEMACHER, H. *The enjoyments of mathematics*, N. York: Dover, 1990
6. MAILLARD, R.; MILLET, A. *Géometrie*, Paris: Hachette, 1951
7. PEREIRA, L.R.; BONFIM, V. Instrumentos articulados que desenham cônicas, RPM nº 80 (10-13), 2013
8. STILLWELL, J. *Numbers and Geometry,* Australia: Springer, 1997.
9. STRONG, W. M. *On linkages for tracing conic sections*, The Annals of Mathematics, vol.8, nº 6, pp. 181-184, 1893.
10. SALLUM, E.M.; RAPHAEL, D.; GARCIA, S.R. *Aparatos que desenham curvas*, 3ª Bienal de Matemática, UFG, 2006.
11. SALLUM, E.M. *Cônicas e aparatos e Seções cônicas*, Oficinas do CAEM - IME/USP, 2013.
12. TUQUIM, M. *Um breve estudo sobre cônicas*. Projeto de Ensino de Matemática. Orientador Prof. Sérgio Alves. IME-USP.2001
13. http://matemateca.ime.usp.br/