POLÍGONOS ELEGANTES

FELIPE HENRIQUE SILVA

INTRODUÇÃO

Os padrões geométricos sempre atraíram o interesse da humanidade. As cerâmicas chinesas, produzidas desde o período Neolítico (aprox. 3000 a.C.), e as belíssimas obras do artista Maurits Cornelis Escher (1898 – 1972) são exemplos que traduzem essa notável busca por estética e harmonia.

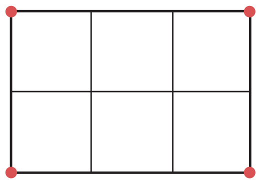
Ligada ao desenvolvimento de padrões geométricos está a construção de polígonos elegantes que tiveram suas propriedades exploradas em uma questão da OBMEP, em 2009. Essas figuras planas são muito interessantes e despertam curiosidade ao serem estudadas.

Durante a resolução da questão mencionada acima, numa turma de preparação olímpica, um aluno me perguntou: “Professor, quantos polígonos elegantes existem?”. A discussão promovida a partir da indagação do aluno me motivou à escrita deste artigo.

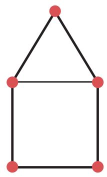
Sendo assim, neste texto, além de responder à pergunta do aluno, pretendo investigar alguns resultados descobertos, e estabelecer um critério de classificação para essa família de polígonos. Espero, ainda, que essa explanação seja apreciada pelo leitor e inspire docentes à criação de sequências didáticas voltadas ao estudo de padrões geométricos no ensino básico.

O PROBLEMA

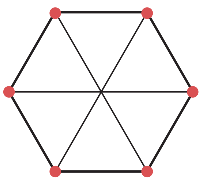
“Um polígono convexo é **elegante** quando ele pode ser decomposto em triângulos equiláteros, quadrados ou em ambos, todos com lados de mesmo comprimento. Abaixo, mostraremos alguns polígonos elegantes, indicando para cada um deles uma decomposição e o número de lados.”



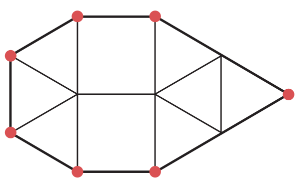
4 lados



5 lados

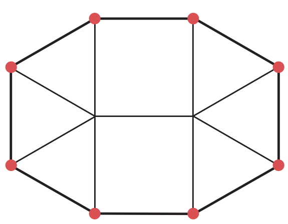


6 lados

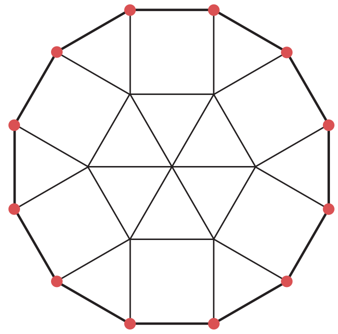


7 lados

A partir desse enunciado, quatro itens são propostos, sendo que os itens a e d solicitam a construção de polígonos elegantes. No primeiro, é necessário que o candidato desenhe um polígono de 8 lados, enquanto que, no último, de 12 lados, sempre indicando sua decomposição. A seguir, há duas possíveis soluções para esses itens da questão.



a) 8 lados



d) 12 lados

Já os itens b e c solicitam a demonstração de resultados que caracterizam esses polígonos. Para resolução desses itens, o problema apresenta duas proposições, que aqui assumo como verdadeiras sem maiores provas. São elas:

i) Em um polígono convexo, todos os ângulos internos são menores que 180°.

ii) A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é $(n - 2) \cdot 180°$.

Sendo assim, o item b pergunta: “Quais são as possíveis medidas dos ângulos internos de um polígono elegante?”. Tendo em vista que os polígonos elegantes são formados apenas por triângulos equiláteros, quadrados ou por ambos, de modo justaposto, seus ângulos internos são iguais à soma de parcelas de 60º ou 90º que não exceda 180º, considerando a proposição (i). Dessa maneira, as possíveis medidas são 60º, 90º, 120º (= 60º + 60º) e 150º (= 60º + 90º).

Adiante, o item c solicita: “Mostre que um polígono elegante não pode ter mais que 12 lados.” Pelo item anterior, sabemos que cada ângulo interno de um polígono elegante mede, no máximo, 150º. Com isso, utilizando a proposição (ii), é possível escrever a seguinte desigualdade:

$(n - 2) \cdot 180° \leq 150° \cdot n$, sendo n o número de lados do polígono

$\Leftrightarrow 30n \leq 360$

$\Leftrightarrow n \leq 12$

Dessa forma, conclui-se que um polígono elegante não pode ter mais do que 12 lados. Aqui,