UMA CONVENIENTE ARRUMAÇÃO PARA AS FRAÇÕES

PAULO SÉRGIO ARGOLO

PALAVRINHAS INICIAIS

Neste breve texto, chamaremos de fração a qualquer expressão da forma p/q, em que p e q são números naturais. Como é habitual, diremos que p e q são, respectivamente, o numerador e o denominador da fração p/q.

Nosso objetivo é estabelecer uma conveniente arrumação para as frações, isto é, construir uma sucessão S, de modo que seja possível decidirmos que posição uma dada fração ocupa em S e, inversamente, qual a fração que ocupa uma dada posição em S.

Também queremos estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto F das frações e o conjunto $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ dos números naturais.

A CONSTRUÇÃO DE S

Vamos definir uma sucessão S para as frações, através das regras seguintes:

— Se a soma do numerador e do denominador em uma fração for menor que em outra, põe-se a primeira (com menor soma) antes da segunda. Se a soma for igual nas duas, põe-se primeiro a que tem menor numerador.

— A primeira fração será 1/1.

Não é difícil ver que, mais cedo ou mais tarde, qualquer fração constará da sucessão assim estabelecida.

Para melhor visualização, disporemos as frações em subsucessões de S, entre colchetes, de modo que:

— Na primeira subsucessão, constará somente uma fração (a soma dos termos é 2);

— Na segunda, constarão duas frações (a soma dos termos, em cada fração, é 3);

— Na terceira, três frações (a soma dos termos, em cada fração, é 4).

E assim por diante.

Teremos então a sucessão S: $\left[\frac{1}{1}\right],\left[\frac{1}{2},\frac{2}{1}\right],\left[\frac{1}{3},\frac{2}{2},\frac{3}{1}\right],\left[\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{1}\right],\ldots$

Observe, caro leitor, que em cada subsucessão, a partir da segunda, as frações apresentam numeradores em ordem crescente (de 1 a n), enquanto que os denominadores apresentam os denominadores em ordem decrescente (de n a 1), quando n é o número de frações dispostas na subsucessão.

PROBLEMA DIRETO

Tendo em vista obtermos uma fórmula que nos permita determinar a posição que uma fração p/q qualquer ocupa na sucessão S, notemos que:

a) Os termos de cada fração situada na n-ésima subsucessão somam $n + 1$.

b) O número de frações situadas na n-ésima subsucessão é igual a n (como vimos acima).

c) A fração p/q situa-se na $(p + q - 1)$-ésima subsucessão.

d) O número de subsucessões que antecedem a fração p/q é igual a $p + q - 2$.

e) O número de frações situadas nas $p + q - 2$ subsucessões referidas na alínea anterior é:

$$1 + 2 + 3 + ... + (p + q - 2),$$

ou seja:

$$\frac{(p+q-2)\cdot(p+q-1)}{2}$$

f) A posição que a fração p/q ocupa na sua subsucessão é igual a p. Por exemplo:

4ª subsucessão : (1/4, 2/3, 3/2, 4/1)

A primeira fração é 1/4, a segunda é 2/3, etc.

g) Então, a posição P, que uma fração p/q ocupa na sucessão S, que estabelecemos acima, será o número calculado na alínea *e*), somado ao número p, ou seja:

$$P = \frac{(p+q-2)\cdot(p+q-1)}{2} + p$$

Por exemplo, a posição que a fração 2/5 ocupará na sucessão S será:

P = [(2 + 5 – 1).(2 + 5 – 2)]/2 + 2 =
(6 . 5)/2 + 2 = 17 (17º termo da sucessão)

PROBLEMA INVERSO

Como determinar a fração p/q que ocupa a posição k na sucessão S?

a) Notemos que o número total de frações reunidas nas n primeiras subsucessões é:

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

b) Determinemos a subsucessão em que a fração p/q está situada.

— Para isso, vamos encontrar o maior valor de n, tal que $[n \cdot (n + 1)]/2 \leq k$.

— Esse valor será representado por n_k.

— Indicaremos por s a soma $[n_k \cdot (n_k + 1)]/2$.

— Se $k \neq s$, podemos ver que a fração p/q está situada na $n_k + 1$ – ésima subsucessão de S.

— Se $k = s$, a fração p/q será o último termo da n_k – ésima subsucessão.

c) Portanto, tendo em vista as alíneas "a" e "b" acima, e as alíneas do Problema Direto, podemos concluir:

— Se $k \neq s$, teremos : $p = k - s$ e, consequentemente, $q = n_k - p + 2$.

— Se $k = s$, teremos: $p = n_k$ e $q = 1$.

Exemplos:

1) Determinar a fração que ocupa a 14ª posição na sucessão S.

Teremos:

— $k = 14$ e $n_k = n_{14} = 4$, pois $(4 \cdot 5)/2 = 10 < 14$, mas $(5 \cdot 6)/2 = 15 > 14$, e a função $f(n) = [n \cdot (n + 1)]/2$ é estritamente crescente.

Então, $s = 10$.

— $p = k - s = 14 - 10 = 4$ e $q = n_k - p + 2 = 4 - 4 + 2 = 2$.

— Portanto, a fração que ocupa a 14ª posição em S é 4/2.

2) Que fração ocupa a 55ª posição na sucessão S?

— Teremos $k = 55$ e $n_k = 10$, pois $(10 \cdot 11)/2 = 55$ e $(11 \cdot 12)/2 > 55$.

Então, $s = 55$.

— Como $k = s$, $p = n_k = 10$ e $q = 1$

— Portanto, a fração que ocupa a 55ª posição em S é 10/1.

PALAVRINHAS FINAIS

Como estamos considerando as frações como meras expressões — aliás, estamos, no fundo, identificando a fração p/q com o par ordenado (p, q), a sucessão S não apresenta termos repetidos. Assim, por exemplo, 1/1 e 3/3, são consideradas frações distintas.

Portanto, caro leitor, podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre os conjuntos F e N. Isto é, podemos definir uma bijeção de F em N. Isso pode ser feito, por exemplo, associando-se ao n-ésimo termo de S (um elemento de F, portanto) o número natural n. Dizemos então que o conjunto F é infinito enumerável.

Convém mencionar que o matemático alemão Georg Cantor (1845 – 1918), fundador da teoria dos conjuntos, ao mostrar que o conjunto Q dos números racionais é infinito enumerável (isto é, pode ser estabelecida uma bijeção de Q em N), construiu uma tabela formada por uma infinidade de linhas e colunas, com regras de construção bem similares às empregadas em nosso texto para construir a sucessão S.