PAINÉIS

PAINEL I

SOBRE FRAÇÕES QUE GERAM INTEIROS

Calixto Garcia

Entre as estratégias de que o professor pode se valer, para promover o estudo investigativo de determinado assunto, é a atividade de concepção e resolução de exercícios, motivada por uma questão oportuna. Lições profícuas com esse propósito encontraremos na seção **Questões com questões** da RPM. É notória a valiosa contribuição que essa iniciativa confere ao ensino e à aprendizagem, além da importância que tem para o desenvolvimento do gosto pela Matemática, sobretudo, no ensino básico.

Esse texto objetiva explorar o bom potencial instrutivo proporcionado por exemplos advindos de uma clássica questão de Olimpíadas de Matemática, que se refere à obtenção de inteiros como razão entre valores de polinômios de grau unitário em variável inteira, com coeficientes inteiros. Verifica-se aqui uma interessante conjunção entre a Aritmética dos inteiros e a Álgebra.

Para o que segue, consideremos n um inteiro.

1) Quais inteiros podem ser escritos na forma $\dfrac{2n-3}{n+1}$?

Um modo de resolver essa questão é reescrever tal fração da seguinte maneira:

$$\frac{2n-3}{n+1}=\frac{2n+2-5}{n+1}=\frac{2(n+1)}{n+1}-\frac{5}{n+1}$$

$$\frac{2n-3}{n+1}=2-\frac{5}{n+1}$$

Com isso, a expressão $\dfrac{2n-3}{n+1}$ resulta em inteiro se, e somente se, $n + 1$ for divisor de 5, isto é, se $n + 1 \in \{-5, -1, 1, 5\}$, ou, $n \in \{-6, -2, 0, 4\}$. Daí, os inteiros da forma $\dfrac{2n-3}{n+1}$ serão 3, 7, −3 e 1.

2) E quanto ao recíproco da razão do exemplo anterior, ou seja, $\dfrac{n+1}{2n-3}$? Para quais valores de n ele gera um inteiro?

Vamos reescrever a expressão dada assim:

$$\frac{n+1}{2n-3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2n+2}{2n-3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2n-3+5}{2n-3}$$

$$\frac{n+1}{2n-3} = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{5}{2n-3}\right)$$

Isso posto, para $\dfrac{n+1}{2n-3}$ ser inteiro, é preciso que $1+\dfrac{5}{2n-3}$ seja um múltiplo de 2. Daí, é necessário que $2n - 3$ divida 5.

Então: $2n - 3 \in \{-5, -1, 1, 5\}$ e, portanto, $n \in \{-1, 1, 2, 4\}$. Verificamos que todos (e somente estes) valores de n fazem de $\dfrac{n+1}{2n-3}$ um inteiro.

3) São dadas duas progressões aritméticas: (a_k): 44; 48; 52; … e (b_k): − 9; − 3; 3; … Para quais valores de k, a_k é divisível por b_k?

Sendo as fórmulas de seus termos gerais $a_k = 4k + 40$ e $b_k = 6k - 15$, vejamos um modo alternativo de expressar $\dfrac{a_k}{b_k}$:

$$\frac{4k+40}{6k-15} = \frac{1}{3}\cdot\frac{4k+40}{2k-5}$$

$$\frac{4k+40}{6k-15} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2(2k-5)+10+40}{2k-5}$$

$$\frac{4k+40}{6k-15} = \frac{1}{3}\cdot\left(2+\frac{50}{2k-5}\right)$$

Para que $\dfrac{4k+40}{6k-15}$ seja inteiro, é necessário (embora não suficiente) que os naturais k sejam tais que $2k - 5$ divida 50. Apenas com $k = 2$ e $k = 5$ isso ocorre. Portanto, de todas as divisões entre os termos a_k e b_k de tais sequências, somente $\dfrac{a_2}{b_2}$ e $\dfrac{a_5}{b_5}$ resultam em inteiros (que são os números -16 e 4, nessa ordem).

4) Quais são os números naturais determinados pela expressão $\dfrac{5n+2}{3n-4}$?

Como

$$\frac{5n+2}{3n-4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{15n+6}{3n-4}$$

$$\frac{5n+2}{3n-4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{5(3n-4)+20+6}{3n-4}$$

$$\frac{5n+2}{3n-4} = \frac{1}{3}\cdot\left(5+\frac{26}{3n-4}\right)$$

$3n - 4 \in \{-26, -13, -2, -1, 1, 2, 13, 26\}$ e, portanto, $n \in \{-3, 1, 2, 10\}$. Só para $n = 1$, $\dfrac{5n+2}{3n-4}$ não resulta em número natural. Noutros casos, essa expressão vale 1, 2 ou 6.

Observemos que a razão entre polinômios reais em x e de graus unitários, $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, com $cx - d \neq 0$, pode ser expressa também assim: $\dfrac{1}{c}\cdot\left(a+\dfrac{bc-ad}{cx+d}\right)$.

De fato, basta realizar a seguinte manipulação algébrica, experimentada no exemplo 4:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{1}{c}\cdot\frac{acx+bc}{cx+d}$$

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{1}{c}\cdot\frac{a(cx+d)+bc-ad}{cx+d}$$

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{1}{c}\cdot\left(a+\frac{bc-ad}{cx+d}\right)$$