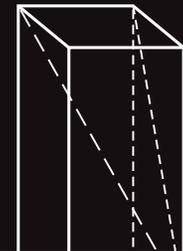


seção



RESPONSÁVEIS

ÉLVIA MUREB SALLUM

E ÉLIO MEGA

ENVIE SUAS SOLUÇÕES PARA RPM – PROBLEMAS

CONTATO: SBM_RPM@IMPA.BR

COM ASSUNTO RPM 102 - PROBLEMAS

PROBLEMAS

As soluções serão corrigidas se enviadas de maneira legível (digitadas, escaneadas ou em fotos) até 30 de março de 2021.

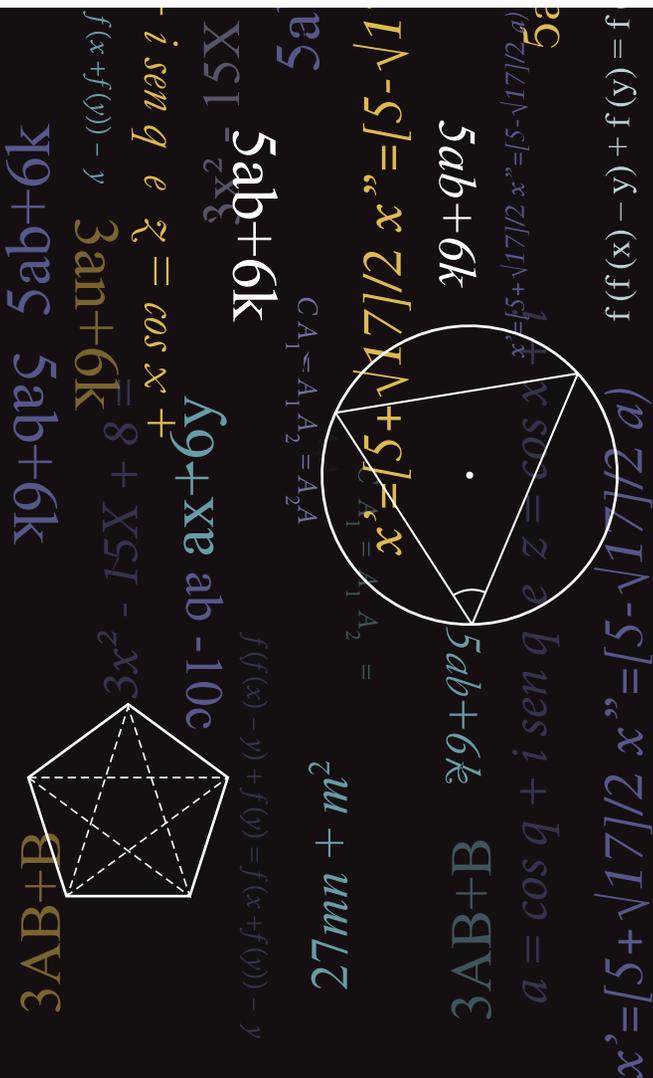
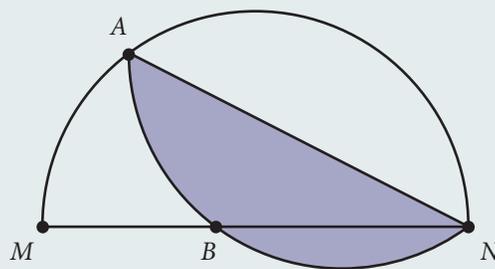
Diante dos problemas de 2020 em relação ao isolamento social e das facilidades tecnológicas atuais acreditamos que será melhor recebermos soluções apenas por e-mail. Contamos com a compreensão de todos.

448

A equação $x^4 - 40x^2 + q = 0$ possui quatro raízes reais. Qual é o valor de q ?

449

Janaína dobrou uma folha semicircular ao longo de uma corda AN , levando um ponto B do arco AN sobre o diâmetro MN , de modo que $MB : BN = 2 : 3$ e $MN = 10$. Qual é o comprimento da corda AN ?



450

Sejam (a_n) e (b_n) duas sucessões de números inteiros que verificam as seguintes condições:

- i) $a_0 = 0; b_0 = 8$
- ii) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2; b_{n+2} = 2b_{n+1} - b_n$
- iii) $a_n^2 + b_n^2$ é um quadrado perfeito para todo n .

Apresente dois valores para o par (a_{2021}, b_{2021}) .

451

Num quadro, há uma lista de 2020 números inteiros positivos. A cada minuto, Juquinha apaga dois dos números da lista e os substitui por sua soma, diferença, produto ou quociente. Por exemplo, se Juquinha apagar os números 3 e 6, ele irá escrever no lugar deles um dos números do conjunto

$$\{6 + 3, 6 - 3, 3 - 6, 6 \times 3, 6 \div 3, 3 \div 6\}.$$

Após 2019 minutos, Juquinha escreve o número -2020 no quadro e não tem como continuar. Prove que seria possível Juquinha ter terminado com o número 2020 escrito no quadro, começando com a mesma lista e usando as mesmas regras.

SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS ANTERIORES

440

Na figura, $ABCD$ é um quadrilátero inscrito e os pontos A', B', C', D' são interseções de arcos de circunferências quaisquer que têm os lados do quadrilátero $ABCD$ como cordas. Prove que o quadrilátero de vértices A', B', C', D' também é inscrito.

Solução

solução revista de Francisco Blasi Junior, SP

Como os quadriláteros $ABCD, ABB'A', BCC'B', CDD'C'$ e $DAA'D'$ são inscritíveis, temos, seguindo a figura:

$$a + h + d + e = 180^\circ = b + c + g + f$$

$$\widehat{B'} = \widehat{A'B'C'} = 360^\circ - (180^\circ - a) - (180^\circ - d) = a + d$$

Analogamente,

$$\widehat{C'} = \widehat{B'C'D'} = c + f$$

$$\widehat{D'} = \widehat{C'D'A'} = e + h$$

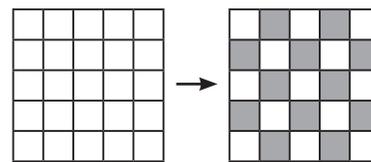
$$\widehat{A'} = \widehat{D'A'B'} = b + g$$

PROBLEMINHAS

As respostas estão no fim desta seção.

1. Na ilha dos Cavaleiros e dos Vigaristas, todo cidadão é um Cavaleiro, que sempre diz a verdade, ou então é um Vigarista, que sempre mente. Durante sua viagem pela ilha, você, que não é cidadão, encontra sete cidadãos ao redor de uma fogueira. Todos eles lhe dizem: "Eu estou sentado entre dois Vigaristas". Quantos Vigaristas há no grupo?

2. As casas de um tabuleiro podem ser de cor branca ou cinzenta. Um movimento produz a mudança de cor de duas casas vizinhas (casas com um lado comum). Ou seja, as casas brancas se tornam cinzentas, e as casas cinzentas se tornam brancas. Partindo do tabuleiro com todas as casas brancas, pelo menos quantos movimentos serão necessários para termos o tabuleiro colorido da forma mostrada na figura?



3. Quatro jogadores ou jogadoras, um de cada modalidade: vôlei, futebol, tênis e basquete, foram jantar juntos e sentaram-se ao redor de uma mesa circular. A pessoa que joga vôlei sentou-se à esquerda de Andreia. A pessoa que joga futebol sentou-se de frente para Bento. Eva e Felipe sentaram-se um ao lado do outro. Uma mulher sentou-se à esquerda da pessoa que joga tênis. Qual é o esporte praticado por Eva?