POLIEDROS REGULARES: DUAS FÓRMULAS E UM BÔNUS

JOCELINO SATO
EDSON AGUSTINI

Por limitações de espaço, trazemos aqui apenas a introdução deste excelente artigo e o trabalho completo pode ser encontrado no site da RPM (http://rpm.org.br/).

1. INTRODUÇÃO

Em Matemática, é frequente a busca por fórmulas e demonstrações simples que possam, de algum modo, facilitar o trabalho daqueles que as utilizam em projetos maiores, nos quais tais fórmulas são apenas ferramentas que devem ser práticas e eficientes. Em particular, professores que gostam de ensinar Geometria Espacial, construindo e utilizando recursos dinâmicos do ambiente 3D do software GeoGebra, frequentemente encontram dificuldades, quando precisam construir os cinco poliedros regulares convexos, ou os treze poliedros semirregulares convexos (também conhecidos como **Poliedros de Arquimedes**) e seus duais (chamados de **Poliedros de Catalan**). Nesse tipo de tarefa, são sempre muito bem-vindas fórmulas simples que relacionam as medidas dos diversos ângulos presentes em um poliedro regular convexo com o seu "gênero", que, conforme veremos mais abaixo, é caracterizado por apenas dois valores bem simples: o número de lados de cada face e o número de arestas que incidem em cada vértice.

Platão, Euclides, Kepler (e seu modelo) e Euler

Tendo em mente a dificuldade acima descrita, pesquisando em algumas referências mais avançadas, e mais antigas, encontramos em dois livros de Coxeter ([1] e [2]) duas fórmulas que relacionam ângulos e gêneros em poliedros regulares convexos. A primeira fórmula relaciona a medida de um ângulo central (vértice no centro do poliedro), determinado por dois vértices consecutivos do poliedro, com seu gênero. A segunda fórmula relaciona a medida de um ângulo diedral (entre duas faces adjacentes do poliedro) com seu gênero. O que chama a atenção nessas duas fórmulas, que apresentaremos e demonstraremos na Seção 2, é que elas são realmente "intrigantes", devido à sua simplicidade, tanto de enunciados, quanto de demonstrações que, aliás, procuramos reescrever de modo a torná-las mais simples e acessíveis ao entendimento de qualquer bom estudante de Ensino Médio.

Como uma feliz consequência das duas fórmulas apresentadas na Seção 2, temos um bônus: podemos deduzir de modo bastante simples várias outras fórmulas da geometria métrica dos poliedros regulares convexos. Esse ponto também é importante pois, tradicionalmente, algumas dessas deduções de fórmulas são bastante longas e trabalhosas de serem feitas. Neste texto, abordaremos na Seção 3 as fórmulas métricas do raio da esfera circunscrita (circunsfera), raio do círculo circunscrito à face, raio da esfera inscrita (insfera), apótema de face, área e volume dos poliedros regulares.

Antes de começarmos, é sempre bom comentar alguns aspectos históricos dos poliedros regulares convexos. Possivelmente, a grande quantidade de simetrias que tais poliedros possuem despertou o interesse para seu estudo bem cedo na história do desenvolvimento da Matemática. Temos no Livro XIII de *Os Elementos*, de Euclides (325 a 265 a.C.), Proposições 13 a 17, a descrição dos cinco poliedros regulares convexos. Sim, todos eles já eram conhecidos desde a época dos gregos antigos.

Antes mesmo de Euclides, Platão (427 a 347 a.C.), no diálogo *Timaeus*, associou quatro dos cinco poliedros regulares conhecidos aos quatro elementos, segundo os quais, para os gregos antigos, a natureza era constituída: terra (cubo), ar (octaedro), água (icosaedro) e fogo (tetraedro). Curiosamente, o dodecaedro ficou fora, embora mais tarde tenha-se tentado atribuí-lo ao universo... Possivelmente, por conta dessa associação, às vezes, os poliedros regulares convexos são chamados de *Poliedros de Platão*.

Mais tarde, já no século XVI, Kepler (1571 a 1630) associou os poliedros regulares convexos aos seis planetas do sistema solar conhecidos à sua época (Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno). O que Kepler fez foi trabalhar com um sistema de esferas inscritas e circunscritas concêntricas aos cinco poliedros. Considerando que uma mesma esfera pode ser inscrita a um poliedro e circunscrita a outro, ele tomou uma sequência com onze sólidos: esfera - octaedro - esfera - icosaedro - esfera - dodecaedro - esfera - tetraedro - esfera - cubo - esfera.