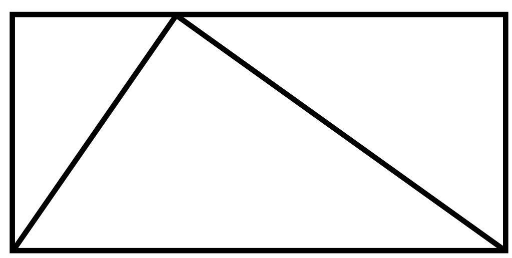
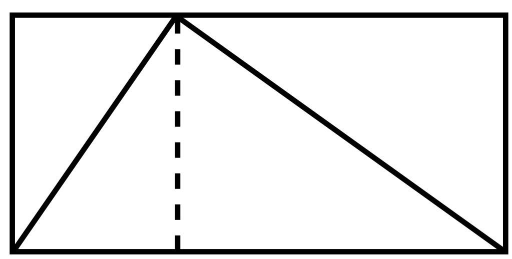
TRIÂNGULO ENCAIXOTADO

ANASTÁCIO BRITO ALVES

Há algumas semanas, havia lido o livro *A Mathematicians Lament*, de Paul Lockhart, um livro fantástico, que todo professor de matemática deveria ler. Uma das passagens do livro trata da questão da área de um triângulo em relação ao retângulo que o contém (como se fosse uma caixa).



Ao invés de indicar diretamente que a fórmula da área de um triângulo é igual à metade da medida da base (b), multiplicada pela medida da altura (h), seria muito melhor imaginar o triângulo dentro de um retângulo. E usando essa representação, concluir que a área daquele é igual à metade da área deste, traçando uma perpendicular do vértice até o lado oposto, e observando que o triângulo ocupa cada uma das metades dos retângulos assim formados.



Em outras palavras, fazer a pergunta "Qual é a fórmula da área de um triângulo?", e usar a figura para respondê-la, "$bh/2$", certamente não é o método mais rápido. Mas usar a criatividade para estabelecer relações, pode ser muito benéfico para o aprendizado.

Algumas semanas mais tarde, ao tentar criar uma questão de geometria, pensei novamente nessa ideia, e construí os três retângulos que "encaixotam" um triângulo ABC, e encontrei uma relação bastante curiosa, bem como alguns outros fatos, reunidos no teorema a seguir.

Teorema. Seja ABC um triângulo acutângulo. A partir de cada lado, constrói-se um retângulo cujas dimensões são o lado do triângulo e sua altura relativa. Considere os pontos do plano que fazem parte de 1 ou mais retângulos. Há seis triângulos retângulos formados por pontos que estão em exatamente um dos três retângulos, que serão chamados de externos. Há três triângulos que estão em exatamente dois dos três retângulos, e esses serão chamados de internos. Apenas o triângulo ABC está em todos os retângulos. Tem-se os seguintes fatos:

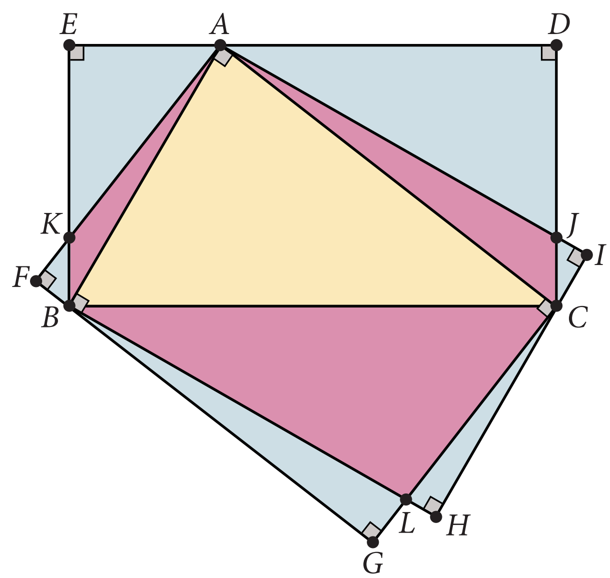
i. A circunferência que passa pelos pontos A, B e C (o circuncírculo do triângulo ABC) passa pelos vértices dos triângulos internos, distintos dos vértices do triângulo ABC;

ii. Os vértices dos triângulos internos, distintos dos vértices do triângulo ABC, são vértices de um triângulo congruente à ABC;

iii. A soma das áreas dos triângulos externos é igual à soma das áreas dos triângulos internos;

iv. A soma das áreas dos triângulos externos é igual à área do triângulo ABC.

Demonstração. Do triângulo ABC, constroem-se os retângulos com dimensões iguais aos lados e às suas respectivas alturas relativas. Foram destacados os ângulos retos, e marcados os pontos de interseção entre os retângulos. Os retângulos são $BCDE$, $AFGC$ e $ABHI$. Os triângulos externos são ADJ, JIC, CHL, LGB, BFK e KEA. Os triângulos internos são AKB, BLC e CJA.



Vamos denotar por S a soma das áreas dos triângulos externos (região azul), por U a soma das áreas dos triângulos internos (região rosa) e por T a área do triângulo ABC (região amarela). Como cada retângulo tem área igual ao dobro da área do triângulo ABC, e que, ao somar, as áreas dos três retângulos, cada triângulo externo é contado uma única vez, cada triângulo interno é contado duas vezes, e que triângulo ABC é contado três vezes, temos

$$S + 2U + 3T = 6T \Rightarrow S + 2U = 3T$$

Como B, L e H são colineares, logo $A\hat{B}L = A\hat{B}H = 90°$.

Analogamente, $G\hat{C}A = L\hat{C}A = 90°$. Com isso, temos que o quadrilátero $ABLC$ é cíclico, pois a soma dos ângulos opostos é 180°. A circunferência que passa por esses quatro pontos passa, em particular, por A, B e C, sendo também o circuncírculo do triângulo ABC. A demonstração de que os pontos K e J também estão sobre o circuncírculo do triângulo ABC é análoga.