ATIVIDADES SOBRE QUADRADOS DE NÚMERO INTEIROS

EUDES ANTONIO COSTA
JUCÉLIA FERREIRA DE SOUSA

INTRODUÇÃO

Nestas notas, referimo-nos a número significando conjunto dos números inteiros positivos (naturais) representado por $\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,3,\cdots\}$ no sistema posicional decimal. As operações de adição e multiplicação (adição de parcelas repetidas) nos números inteiros e algoritmos padrão da aritmética, ou seja, procedimentos e métodos que realizam e efetuam a adição ou multiplicação de dois números, e algumas técnicas. Entendemos que os algoritmos padrão da aritmética são mais do que "rotinas para obter a resposta", visto que, eles sintetizam um significado teórico e uma notação posicional, além de serem práticos. Lembramos também que os algoritmos da aritmética são preparatórios para a álgebra abstrata. Em virtude da notação e construção no sistema decimal, existe uma forte analogia entre a aritmética dos números em uma base $b > 1$ arbitrária e a aritmética dos polinômios. Técnicas operatórias de adição e multiplicação podem, por exemplo, serem encontradas em Hefez [1], em Nicolai [2] ou ainda na RPM 22, 28, 37 ou 79.

Neste artigo descreveremos técnicas alternativas que permitem o cálculo de quadrados de um número. Apresentaremos algoritmos aritméticos que permitem usar apenas papel e lápis; um desafio em tempos em que tais cálculos são feitos de forma rápida em pequenas máquinas, as calculadoras eletrônicas ou aplicativos de celulares. É oportuno registrar que não somos contra o uso de auxílios tecnológicos no ensino de matemática, em sala de aula ou fora do ambiente escolar. Normalmente após apresentarmos os algoritmos padrão da aritmética, aconselhamos que, para facilitar ou para agilizar procedimentos, os quadrados dos números $1 \leq a \leq 20$ sejam conhecidos. Por exemplo, em sala de aula deixamos uma lista com esses números e seus quadrados à vista em um painel.

Mostramos esses exemplos como prática docente para instigar os estudantes na produção ou na elaboração do conhecimento.

1. QUADRADO DE NÚMEROS TERMINADOS EM 5

Primeiramente, apresentemos a Lei de Alcides (RPM 37), que também fora uma questão do Exame de Qualificação do PROFMAT [4, 2017. 2], que fornece uma técnica para determinar o quadrado de um número cujo algarismo das unidades é o 5.

Algoritmo 1 (Lei de Alcides). Dado um número cujo algarismo das unidades é o 5.

- O quadrado terminará em $5^2 = 25$;
- Para o cálculo dos algarismos precedentes, considere o número original sem o 5 (algarismo das unidades) e multiplique pelo seu sucessor. Este resultado estará posicionado antes do 25.

Exemplo 1. Para calcularmos o quadrado de 45, sabemos que $5^2 = 25$; e considerando o número original, isto é, 45, retirando o algarismo da unidade resta o algarismo 4; multiplicando 4 pelo seu sucessor 5, resulta em 20 (número que precede o 25). Assim temos $45^2 = 2025$.

O Algoritmo 1 (Lei de Alcides) pode ser apresentado da seguinte forma:

Afirmação 1. Se o número $a = 10k + 5$, então $a^2 = k \cdot (k+1) \cdot 100 + 5^2$.

Prova: Como o algarismo das unidades de a é o 5; podemos representá-lo na notação decimal:

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + 5$$

colocando 10 em evidência, obtemos:

$$a = 10\left(\underbrace{a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_1}_{k}\right) + 5$$

O número a pode ser reescrito na forma $10k + 5$, fazendo

$$k = a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_1 .$$

Elevando ao quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned}(10k+5)^2 &= 100 \cdot k^2 + 2 \cdot 10 \cdot k \cdot 5 + 5^2 \\ &= 100 \cdot k^2 + 100 \cdot k + 5^2 \\ &= 100 \cdot k \cdot (k+1) + 25\end{aligned}$$

Portanto, a^2 é o número terminado em 25, e os outros algarismos, os que antecedem 25, são obtidos pela multiplicação de $k \cdot (k+1)$.

2. PRIMEIRO ALGORITMO PARA O QUADRADO DE NÚMERO *A*

Em geral, a “lei de Alcides” é um recurso bastante usado em sala de aula para encontrar com facilidade e rapidez o quadrado de um número, em que o algarismo das unidades seja o 5. Assim, partimos em busca de um algoritmo que calculasse o quadrado de um número, que envolvesse uma parte multiplicada por 100, adicionada de algum quadrado “pequeno”. Ao admitirmos a igualdade

$$a^2 = (a - x) \cdot 100 + (y - a)^2$$

em que $a \neq 0$ seja o número dado, e x e y sejam números a determinar, encontramos $x = 25$ e $y = 50$. Observe que

$$\begin{aligned}a^2 &= (a - x) \cdot 100 + (y - a)^2 \\ &= 100 \cdot a - 100 \cdot x + y^2 - 2 \cdot y \cdot a + a^2\end{aligned}$$

Assim devemos ter

$$100 \cdot a - 100 \cdot x = 2 \cdot y \cdot a - y^2$$

De $100 \cdot a = 2 \cdot y \cdot a$ obtemos $y = 50$, visto que $a \neq 0$. Agora usando que $y = 50$ em $y^2 = 100 \cdot x$, obtemos $x = 25$. O que fizemos justifica a seguinte

Afirmação 2. Se $a \neq 0$ é um número inteiro, então $(a - 25) \cdot 100 + (50 - a)^2$ é igual ao quadrado de a.

Algoritmo 2. Dado um número $a \neq 0$:

- encontre os números $(a - 25)$ e $(50 - a)$;
- o quadrado de a é $(a - 25) \cdot 100 + (50 - a)^2$.

Exemplo 2. Dado $a = 41$, temos que $(41 - 25) = 16$ e $50 - 41 = 9$, assim

$$16 \cdot 100 + 9^2 = 1681 = 41^2$$