VALE PARA 1, PARA 2, PARA 3,... . VALE SEMPRE?

Renate Watanabe

As afirmações abaixo, sobre números naturais, são verdadeiras para os números 1, 2, 3 e muitos outros. Perguntamos: elas são verdadeiras **sempre**?

Verdadeiro ou falso?

1. $\forall n \in IN$, $n < 100$.

2. $\forall n \in IN$, $n^2 + n + 41$ é um número primo.

3. $\forall n \in IN^*$, 2^n nunca começa com 9.

4. $\forall n \in IN^*$, a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

5. $\forall n \in IN^*$, $2n + 2$ é a soma de dois números primos.

6. $\forall n \in IN^*$, se n for par, divida-o por 2; se n for ímpar, multiplique-o por 3 e adicione 1. Repita o processo com os resultados. A sequência de números assim obtidos sempre termina em 1.

Vejamos:

1. "$n < 100$" é uma sentença verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e outros, mas torna-se falsa para qualquer número natural maior do que 99. Portanto, "$\forall n \in IN$, $n < 100$" é uma sentença *falsa.*

2. "$n^2 + n + 41$ é um número primo" é uma sentença verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e outros. De fato, ela é verdadeira para todos os números naturais menores do que 40.
Porém o número $40^2 + 40 + 41 = 40 \times (40 + 1) + 41 = 41 \times 41$ não é primo, mostrando que a sentença "$\forall n \in IN$, $n^2 + n + 41$ é um número primo" é uma sentença *falsa*.

(Em 1772, Euler mostrou que $f(n) = n^2 + n + 41$ assumia valores primos para $n = 0, 1, 2,..., 39$. Observando que $f(n - 1) = f(- n)$, vê-se que $n^2 + n + 41$ assume valores primos para 80 inteiros consecutivos: $-40, -39, ..., -1, 0, 1, ..., 39$. Substituindo a variável n por $n - 40$, obtém-se : $f(n - 40) = g(n) = n^2 - 79n + 1601$ que assume valores primos para todos os números naturais de 0 até 79 – um *record* para trinômios do segundo grau.)

3. "$\forall n \in IN^*$, 2^n nunca começa com 9" é uma sentença verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e, demora um pouco até se achar um número que a torna falsa. 2^{59} é a primeira potência de 2 que começa com 9 e por isso "$\forall n \in IN^*$, 2^n nunca começa com 9" é uma sentença *falsa*.

[Há um teorema curioso: Dada uma sequência **qualquer** de dígitos (70941, por exemplo), existe uma potência de 2 que começa com essa sequência de dígitos.]

4. “A soma dos *n* primeiros números ímpares é n^2” é uma sentença verdadeira para n = 1, n = 2, n = 3 e, como no caso anterior, após muitas e muitas tentativas, não se acha um número natural que a torne falsa. Nesse caso, tal número não existe, pois essa sentença é *verdadeira sempre*.

5. “2*n* + 2 é a soma de dois números primos” é uma sentença verdadeira para n = 1, n = 2, n = 3 e, como no exemplo anterior, após muitas e muitas tentativas, não se encontra um número natural que a torne falsa. Mas agora temos uma situação nova: ninguém, até hoje, encontrou um número que tornasse a sentença falsa e ninguém, até hoje, sabe demonstrar que a sentença é verdadeira sempre.

(A sentença é a famosa conjetura de Goldbach feita em 1742 numa carta dirigida a Euler: “Todo inteiro par, maior do que 2, é a soma de dois números primos”. Não se sabe, até hoje, se essa sentença é verdadeira ou falsa.)

6.”$\forall n \in IN^*$, se *n* for par, divida-o por 2; se *n* for ímpar, multiplique-o por 3 e adicione 1. Repita o processo com os resultados. A sequência de números assim obtidos sempre termina em 1”
Essa é uma sentença verdadeira para n = 1, n = 2, n =3 e, como no exemplo anterior, ninguém, até hoje, encontrou um número que tornasse a sentença falsa e ninguém, até hoje, sabe demonstrar que ela é verdadeira sempre. Trata-se da conjetura de Collatz que começou circular por volta de 1930 e “tem roubado horas de sono de muitos matemáticos (RPM 74, p.4)”

Em suma, dada uma afirmação sobre números naturais, se encontrarmos um contra-exemplo, saberemos que a afirmação é falsa. E se não encontrarmos um contra-exemplo? Nesse caso, suspeitando que a afirmação seja verdadeira sempre, uma possibilidade é tentar demonstrá-la recorrendo ao princípio da indução.

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA

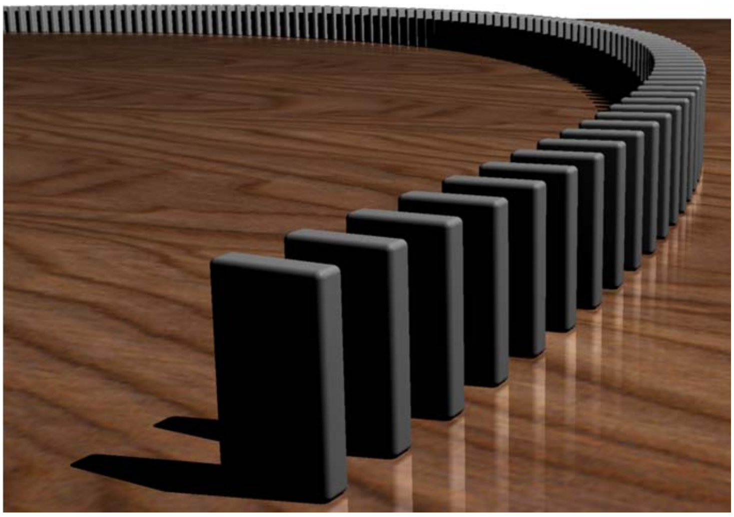
Seja n_o um inteiro não negativo. Para cada inteiro $n \geq n_o$, seja dada a proposição $p(n)$.

(a) **Se** $p(n_o)$ é verdadeira e

(b) **se,** sendo $p(n)$ verdadeira, $p(n+1)$ também é verdadeira para todo $n \geq n_o$,

então, $p(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_o$.

Ao lado está uma visão intuitiva do princípio da indução.
Se a primeira pedra for derrubada e
se elas estiverem colocadas de modo que caindo uma, a seguinte também cairá,
então todas as pedras cairão.



TEOREMA

$\forall n \in \mathbb{N},\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \mathrm{n}^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Demonstração por indução:
A afirmação é verdadeira para *n* = 1, pois $1^2 = \frac{1}{6}.1.(1+1).(2+1)$.
Vamos supor que a afirmação é verdadeira para um número *k*, isto é, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \mathrm{k}^2 = \frac{1}{6}\ k(k+1)(2k+1)$,
e vamos provar que a afirmação é verdadeira para *k* + 1, isto é,
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \mathrm{k}^2 + (\mathrm{k}+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$.
De fato,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \mathrm{k}^2 + (\mathrm{k}+1)^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2.$$

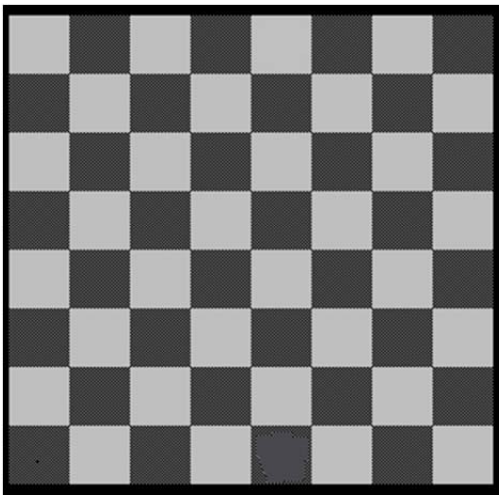
Colocando (*k* + 1) em evidência, o segundo membro é igual a

$$\frac{1}{6}(k+1)[2k^2 + k + 6k + 6] = \frac{1}{6}(k+1)[2k^2 + 4k + 3k + 6] =$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)[2k(k+2) + 3(k+2)] = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)\ \mathrm{c.q.d.}$$

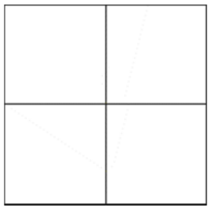
O princípio da indução garante que a igualdade é verdadeira sempre.

QUANTOS QUADRADOS TEM UM TABULEIRO DE XADREZ?

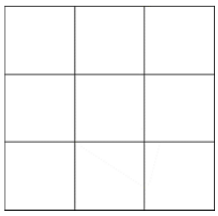


Há 64 quadrados 1x1, mas também há quadrados 2x2, 3x3, etc. Quantos há, ao todo?

Não sabendo como fazer a contagem, é uma boa ideia começar com uma situação mais simples.
Num quadriculado 2x2 há 4 quadrados 1x1 e 1 quadrado 2x2.
Total: 5 quadrados.

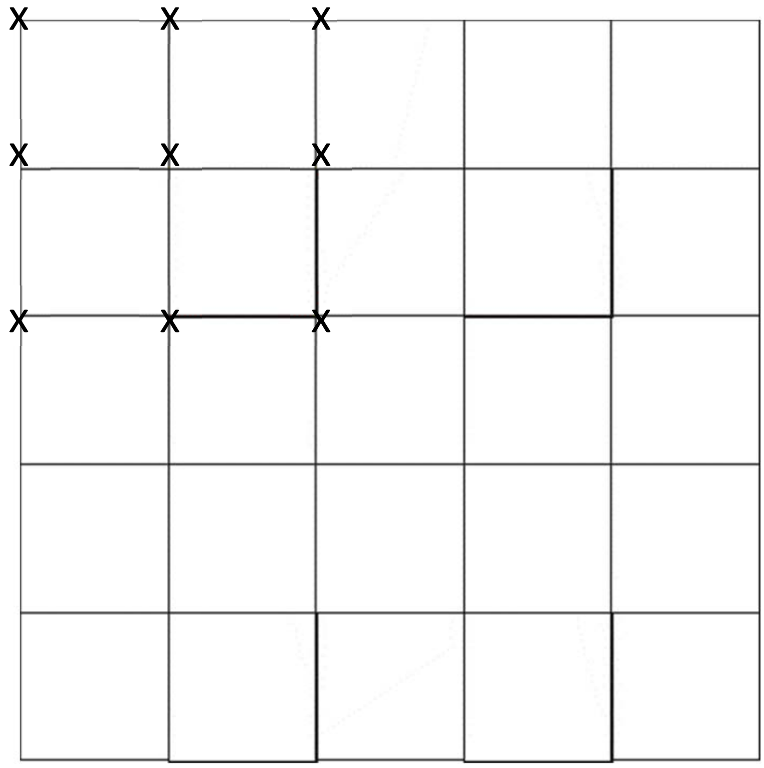


Num quadriculado 3x3 há
9 quadrados 1x1, 4 quadrados 2x2 e 1 quadrado 3x3
Total: 14 quadrados

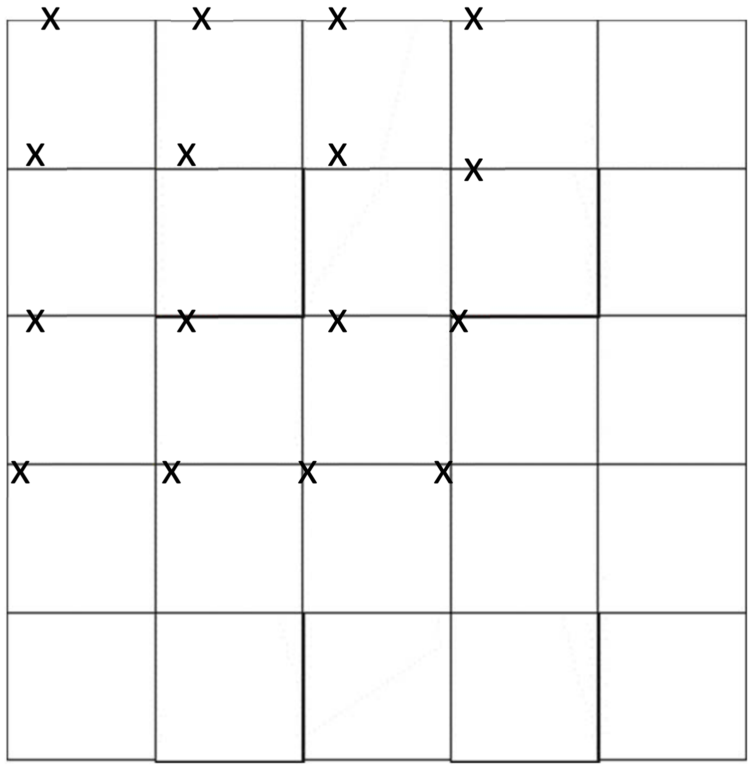


Quantos quadrados 3x3 há num quadriculado 5x5?
Refazendo a pergunta:
Quantos pontos desse quadriculado podem ser "**vértice superior esquerdo**" (VSE) do quadrado?
Resposta:

Na primeira linha, 3 pontos (3 = 6 – 3);
na segunda linha, 3 pontos;
na terceira linha, 3 pontos;
nas outras linhas, nenhum ponto.
Para cada VSE, existe um quadrado 3x3.
Existem 9 quadrados 3x3 contidos no quadriculado 5x5.



Quantos quadrados 2x2 há num quadriculado 5x5? Ou seja, quantos pontos do quadriculado podem ser “**vértice superior esquerdo**” (VSE) do quadrado?
Resposta:
Na primeira linha, 4 pontos (6 – 2);
na segunda linha, 4;
na terceira linha 4;
na quarta linha, 4;
nas outras linhas, nenhum ponto.
Para cada VSE, existe um quadrado 2x2.
Existem 16 quadrados 2x2 contidos no quadriculado 5x5.



Em geral, num quadriculado n x n, há quantos quadrados k x k?
Repetindo o processo acima, observa-se que a linha superior de um quadriculado n x n tem $n + 1$ pontos. Os k pontos mais à direita dessa linha não podem ser VSE. Os restantes $n + 1 - k$ pontos podem. Existem $n + 1 - k$ quadrados k x k com VSE na primeira linha. O mesmo acontece na segunda, terceira,... $(n + 1 - k)$ - ésima linha.
Então, em um quadriculado n x n existem $(n + 1 - k)^2$ quadrados k x k.

k	$n + 1 - k$	nº de quadrados k x k
1	n	n^2
2	$n - 1$	$(n - 1)^2$
3	$n - 2$	$(n - 2)^2$
...	...	...
$n - 1$	2	4
n	1	1

Assim, um quadriculado n x n contém ao todo

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ quadrados.

Em particular, um tabuleiro de xadrez contém 204 quadrados.

A igualdade acima foi demonstrada por indução, mas o segundo membro “caiu do céu”. Como se descobre esse segundo membro? Há vários jeitos. Um deles, usando o Binômio de Newton, é o seguinte:

$$
\begin{array}{rc|c|ccccccccc}
1^3 & = & & & & & & & & & & 1^3 \\
2^3 & = & (1+1)^3 & = & 1^3 & + & 3.1^2.1 & + & 3.1.1^2 & + & 1^3 \\
3^3 & = & (2+1)^3 & = & 2^3 & + & 3.2^2.1 & + & 3.2.1^2 & + & 1^3 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
n^3 & = & [(n-1)+1]^3 & = & (n-1)^3 & + & 3.(n-1)^2.1 & + & 3.(n-1).1^2 & + & 1^3 \\
(n+1)^3 & = & (n+1)^3 & = & n^3 & + & 3.n^2.1 & + & 3.n.1^2 & + & 1^3
\end{array}
$$

Ignorando a coluna entre as barras e somando os elementos de cada coluna, obtém-se, após os cancelamentos de 1^3, 2^3, 3^3,..., n^3,

$(n+1)^3 = 3.(1^2 + 2^2 + \cdots n^2) + 3.(1 + 2 + \cdots + n) + (n+1)$.

Lembrando que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}\, n(n+1)$, obtém-se:

$(n+1)^3 = 3.(1^2 + 2^2 + \cdots n^2) + \dfrac{3}{2}\, n(n+1) + (n+1)$;

$6.(1^2 + 2^2 + \cdots n^2) = (n+1)[2.(n+1)^2 - 3n - 2] = (n+1)[2n^2 + n]$.

Finalmente,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Essa oficina apoiou-se nos seguintes artigos da RPM:

RPM 9, p.32 - Vale para 1, para 2, para 3... Vale sempre?

RPM 69, p.36 - Contando quadrados em tabuleiros de xadrez.

RPM 7, p.44 - Como calcular $1^p + 2^p + 3^p + \cdots n^p$.