

OFICINA 13- Decomposição de figuras geométricas

Elvia Mureb Sallum-UFMS-USP

Inicialmente veremos que a teoria de área de regiões poligonais planas pode ser desenvolvida a partir da área de um quadrado: cortando a região por um número finito de retas e justapondo as peças, ela pode ser transformada num quadrado.

Atingiremos esse objetivo mostrando, uma a uma, as seguintes decomposições: de um retângulo em um quadrado, de um retângulo em outro retângulo de base unitária, de um triângulo em um retângulo e a de um polígono em um retângulo.

Além disso, concluiremos que dadas duas regiões poligonais de mesma área pode-se decompor uma delas com um número finito de retas de modo que justapondo as peças se obtenha a outra (Teorema de Bolyai).

Em cada passo, o leitor poderá observar fisicamente as afirmações, recortando e compondo com papel cartão ou outro material.

Veremos, também, que a teoria de volumes de sólidos geométricos não é tão simples: por exemplo, um tetraedro regular não pode ser decomposto por um número finito de cortes planares de modo que justapondo as peças se obtenha um cubo. Em geral, de algum modo é necessário um processo *infinito* como faziam os gregos antigos.

Decomposição de retângulo em quadrado.

Vejamos que todo retângulo pode ser transformado num quadrado decompondo-o com um número finito de cortes retilíneos e justapondo as peças.

Seja um retângulo ABCD de lados $AD=a$ e $AB=b$. Como o quadrado deve ter área $c^2=ab$, o lado do quadrado a ser formado deve ser $c=\sqrt{ab}$.

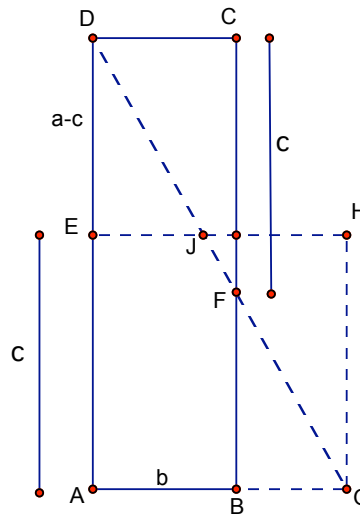
Suponha, sem perda de generalidade, que $a>b$.

Atividade 1 Suponha $c > a/2$.

Marque os pontos E e F nos lados AD e BC do retângulo dado ABCD, tais que **$AE=FC=c$** .

Faça cortes pela reta DF e pelo segmento EJ paralelo à base AB.

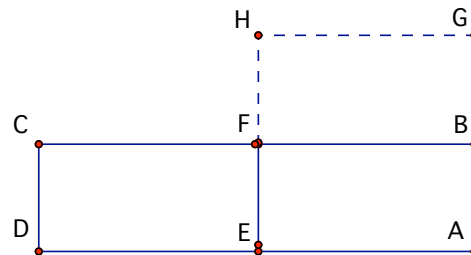
Mostre que, com os triângulos $\triangle DCF$, $\triangle DEJ$ e o pentágono ABFJE, podemos formar um quadrado de lado $c = \sqrt{ab}$.
Sugestão: Complete o retângulo AEHG, como na figura. Prove as congruências $\triangle DCF \cong \triangle JHG$ e $\triangle DEJ \cong \triangle FBG$. Mostre que AEHG é um quadrado.



Atividade 2 Suponha $c = a/2$

Marque os pontos E no lado AD e F no lado BC com $AE=FC=c$.

Corte em EF e justaponha os 2 retângulos DCFE e ABFE formando o retângulo AGHE. Mostre que AGHE é um quadrado.

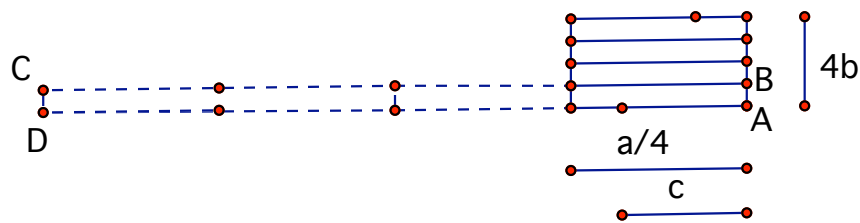
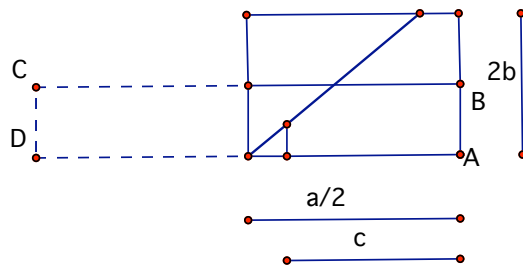


Atividade 3 Suponha $c < a/2$.

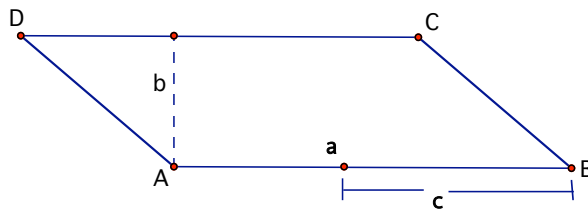
Mostre que : $c < a/2 \Leftrightarrow b < a/4$.

Neste caso, escolhamos n natural tal que $a/2n \leq c < a/n$ ($\Leftrightarrow a/4n^2 \leq b < a/n^2$) e, dividindo o lado maior $AD=a$ em n partes iguais, obtemos n retângulos de dimensões a/n e b que, justapostos pelos lados de medida a/n , formam um retângulo de base nb, altura a/n e área c no qual é possível utilizar a Atividade 1 para transformar em quadrado.

Em cada uma das figuras abaixo determine as peças que transformam o retângulo ABCD num quadrado.



Atividade 4 Decompor o paralelogramo da figura, em que $c = \sqrt{ab}$, num quadrado.



Decomposição de um retângulo em outro de mesma área.

Veremos que se dois retângulos têm a mesma área, então, é possível recortar e justapor as peças de qualquer um deles obtendo o outro.

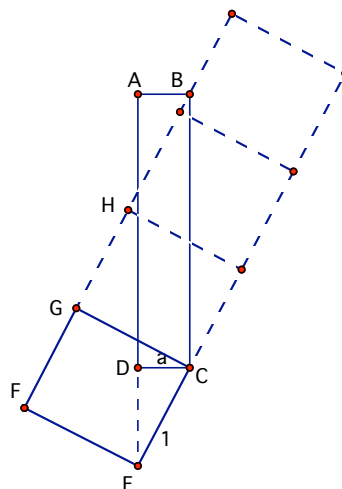
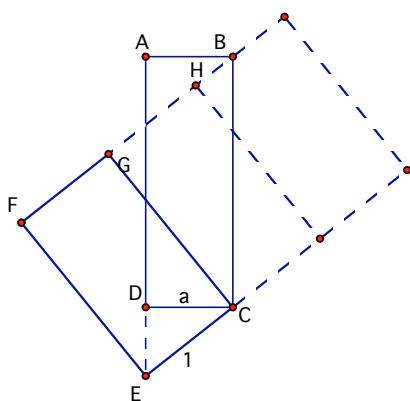
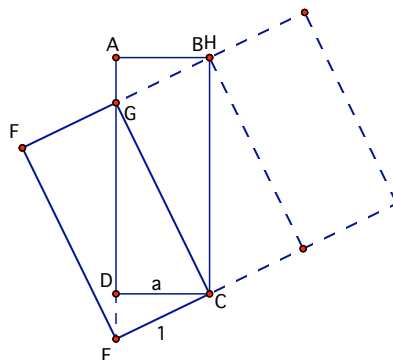
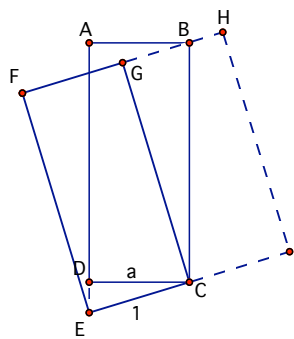
Considere um retângulo ABCD cujo lado de menor medida seja $AB = a$.

Queremos cortá-lo por um número finito de retas de modo que, justapondo as peças, fique formado outro retângulo de mesma área e base dada b (indicaremos $b=1$).

Atividade 5 Suponha que $a < b = 1$.

Construa o triângulo retângulo $\triangle CDE$ com hipotenusa $CE = b = 1$ e o retângulo CEFG de modo que a reta FG passe em B com tantas cópias quantas forem necessárias.

Observar, nas figuras, que quanto menor for $AB = a$ em relação a $b = 1$ mais cópias serão necessárias.



Prove que, em cada caso da figura acima, recortando o retângulo ABCD pelos segmentos nele marcados e justapondo as peças se obtém o retângulo CEFG de base $CE=b=1$.

Atividade 6 Se $a > b = 1$ basta decompor, pelo método acima, o retângulo de base menor b no de base maior a .

Ou, recorte ABCD em n retângulos cada um com base $a/n < b = 1$, empilhe-os pelos lados de medida a/n e aplique o método acima para o retângulo formado. *Experimente.*

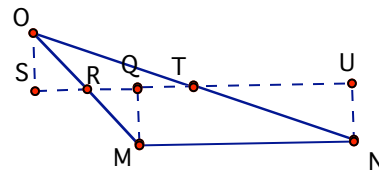
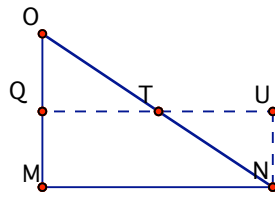
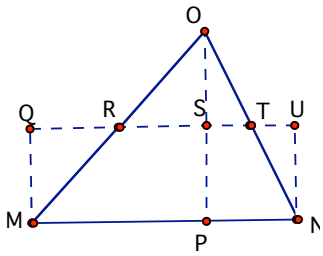
Decomposição de triângulo em quadrado

Inicialmente decomponamos o triângulo num retângulo e, em seguida, este num quadrado.

Dado um $\triangle MNO$, como na figura, considere o retângulo MNUQ com o lado UQ passando pelo ponto médio R do lado OM.

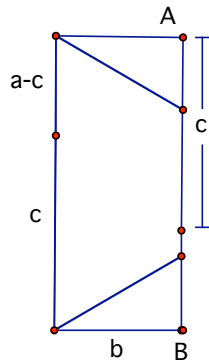
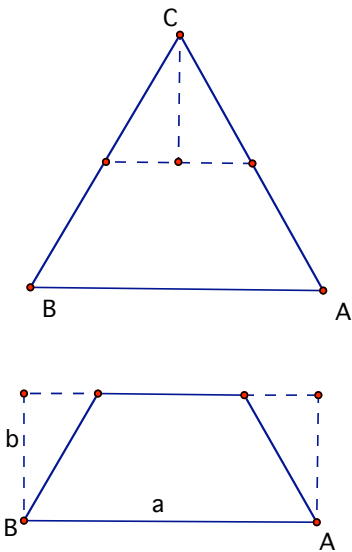
Atividade 7 Mostre que $\triangle OST \cong \triangle NUT$ e $\triangle ORS \cong \triangle MRQ$.

Conclua que, em cada caso apresentado na figura abaixo, seccionando adequadamente o $\triangle OMN$ e justapondo as peças, compomos um retângulo MNUQ.



Observe que qualquer triângulo também pode ser decomposto como o primeiro. Agora é só decompor o retângulo MNUQ em quadrado.

Atividade 8 Termine a decomposição do triângulo equilátero abaixo em um quadrado e conte as peças obtidas.

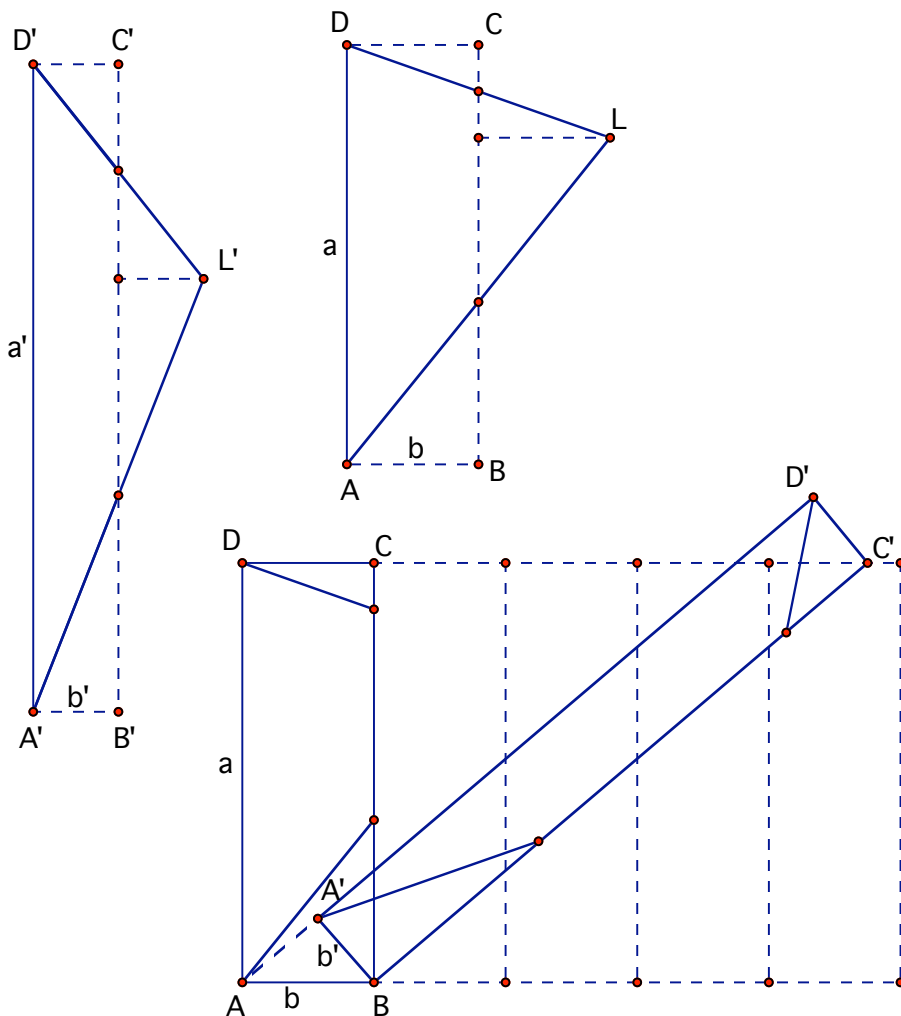


Decomposição de um triângulo em outro de mesma área

Dados dois triângulos quaisquer de mesma área podemos decompor um deles de modo que justapondo as peças se obtenha o outro.

Decompomos cada triângulo num retângulo e depois decomparamos um desses dois retângulos de modo a formar o outro.

Atividade 9 Termine a decomposição dos dois triângulos abaixo, que têm a mesma área, de modo que, com as peças de um deles, se possa compor o outro. Conte as peças obtidas.

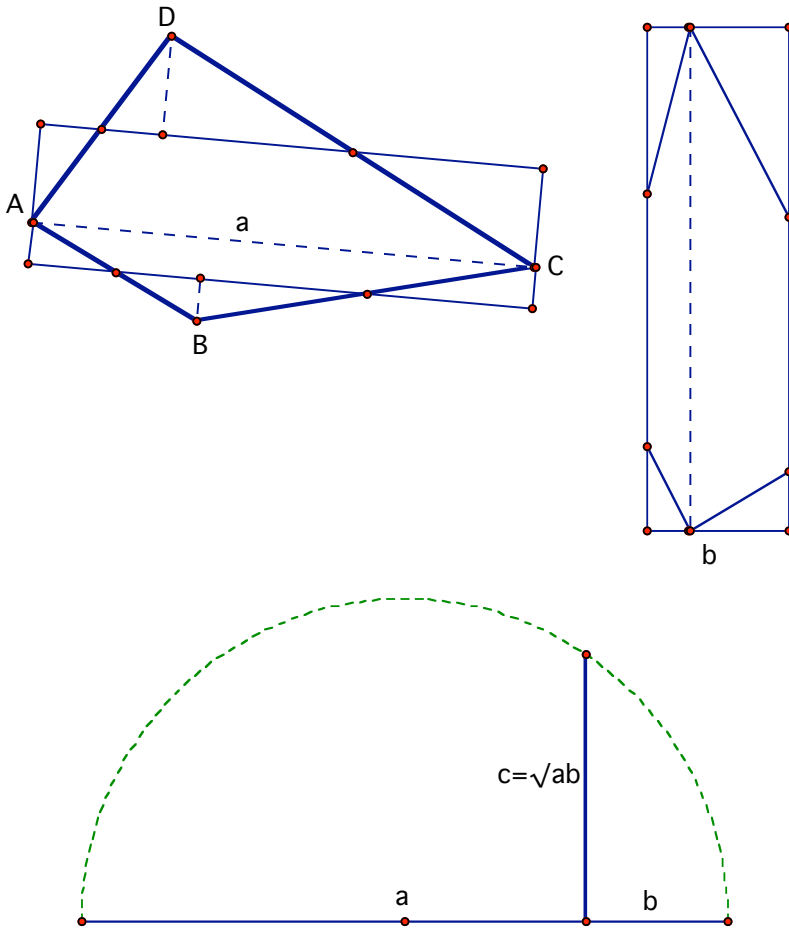


Decomposição de região poligonal em quadrado.

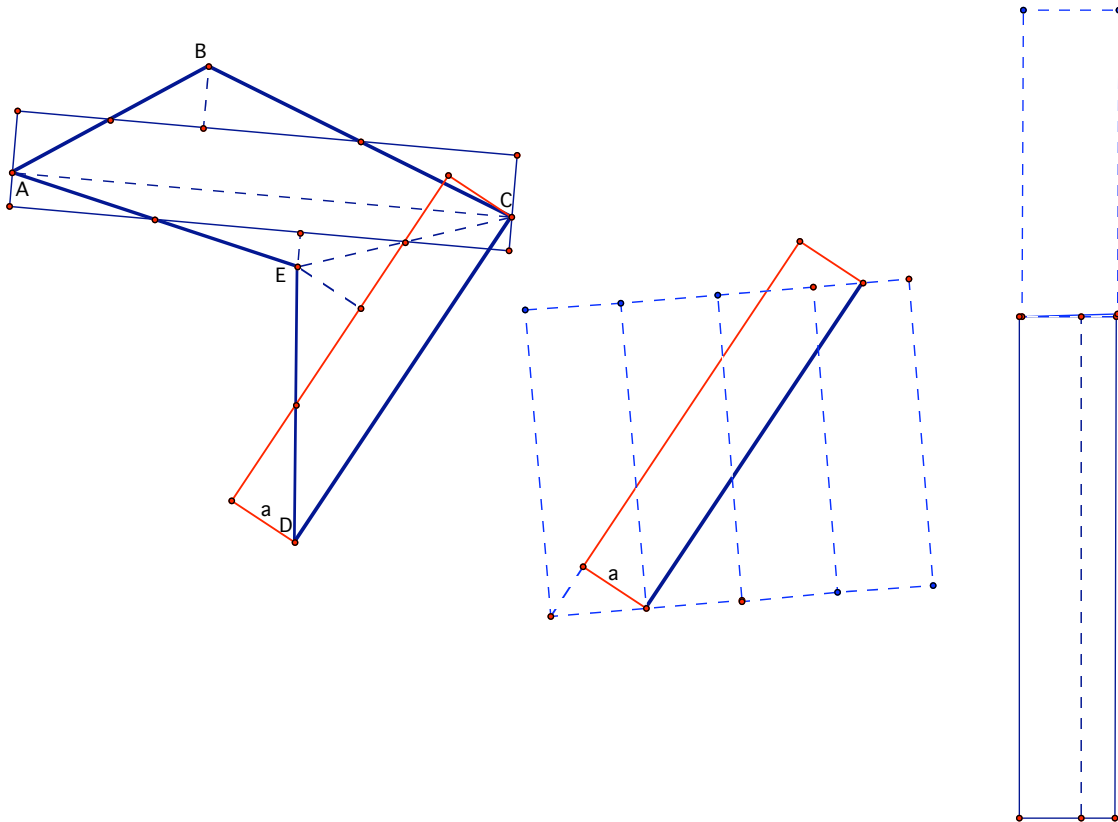
Decompomos um polígono em triângulos, cada triângulo num retângulo e cada retângulo num outro retângulo com um lado unitário, que pode ser a menor das bases.

Juntando esses retângulos pelo lado unitário, vemos que o polígono é transformado num retângulo de lado 1 que, por sua vez, pode ser decomposto de modo a formar um quadrado.

Atividade 10 Termine de decompor o quadrilátero da figura abaixo num quadrado e conte as peças. Para determinar o lado c do quadrado a ser formado usamos construções com régua e compasso.



Atividade 11 Termine de decompor o pentágono ABCDE da figura abaixo num quadrado e *conte* as peças. Determine o lado c do quadrado a ser formado usando construções com régua e compasso.



Decomposição de uma região poligonal em outra de mesma área

Com o que vimos até agora podemos decompor duas regiões poligonais de mesma área de modo que justapondo as peças de uma delas se possa formar a outra.

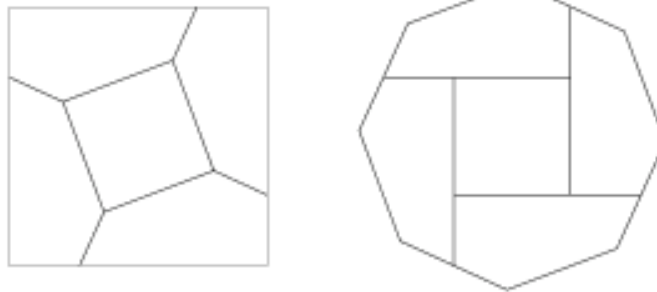
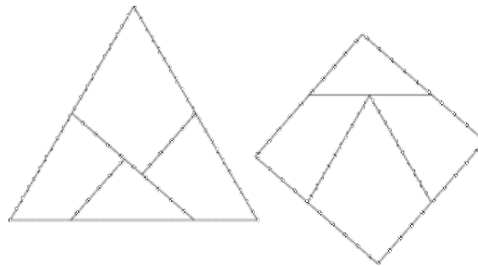
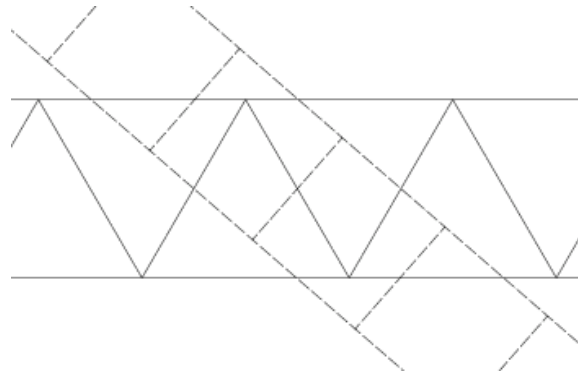
Atividade 12 Descreva um método para isso.

Decomposições com poucas peças

Você observou que, em geral, a quantidade de peças que se obtém pelos métodos acima é grande.

Obter decomposições com poucas peças depende de muita engenhosidade ([2], [5]).

Abaixo vemos uma decomposição de um triângulo equilátero num quadrado, juntamente com a ideia usada para a obtenção dessa decomposição, e a decomposição de um quadrado em um octógono regular.



O tetraedro regular não é decomponível num paralelepípedo

Como comentamos na introdução, a teoria de volumes de poliedros não funciona como a de áreas de polígonos: nem sempre é possível transformar, por um número finito de cortes planares e justaposições, um poliedro num paralelepípedo.

Existem tetraedros que podem ser decompostos em um número finito de peças que justapostas formam paralelepípedos ([1]) porém, de maneira geral é necessário usar um processo infinito para desenvolver a teoria de volumes de poliedros.

Daremos uma *ideia da demonstração*, elaborada por Dehn, de que:

Não é possível cortar um tetraedro regular por um número finito de planos de modo que, justapondo as peças, fique formado um cubo.

A cada poliedro S , Dehn associou uma expressão

$$D(S) = l_1 \otimes \alpha_1 + l_2 \otimes \alpha_2 + \dots + l_n \otimes \alpha_n$$

sendo l_i , α_i e n o comprimento da aresta i , a medida em radianos do ângulo diedral correspondente e o número de arestas do poliedro, respectivamente.

Essas expressões, estão sujeitas às regras

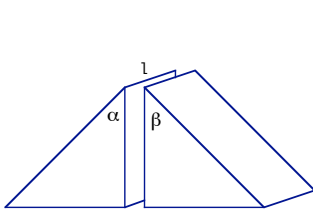
$$i) l \otimes (\alpha + \beta) = l \otimes \alpha + l \otimes \beta$$

$$ii) (l+k) \otimes \alpha = l \otimes \alpha + k \otimes \alpha$$

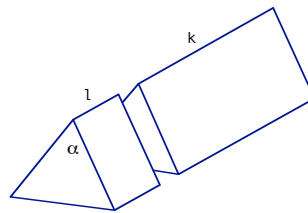
$$iii) l \otimes \pi = 0$$

que, indicam a invariância da expressão $D(S)$ quando cortamos o poliedro S e justapomos suas peças formando um outro poliedro.

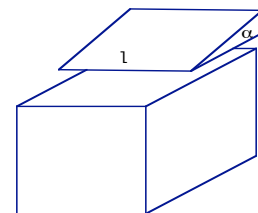
Nas figuras abaixo temos visualizações das regras acima: a primeira indica um corte ao longo de uma aresta já existente ou produzindo uma nova aresta, a segunda, um corte atravessando uma aresta e a terceira um corte em que um dos ângulos é π . Esse último corte, ao longo de uma aresta l produz uma peça com um ângulo α e outra peça (com ângulo π) que não tem mais aquela aresta.



$$l \otimes (\alpha + \beta) = l \otimes \alpha + l \otimes \beta$$



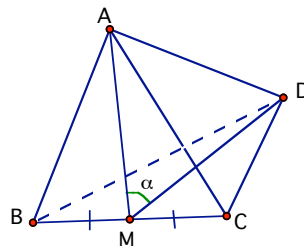
$$(l+k) \otimes \alpha = l \otimes \alpha + k \otimes \alpha$$



$$l \otimes \pi = 0 \text{ ou } l \otimes (\alpha + \pi) = l \otimes \alpha$$

Das seis afirmações seguintes segue que o tetraedro regular não pode ser transformado num cubo por um número finito de cortes e justaposições.

1) Se α é o ângulo diedral do tetraedro regular temos $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Use a figura para confirmar.



2) Para cada $m \in \mathbb{N}^*$ existe $q_m \in \mathbb{Z}$, não divisível por 3, tal que $\cos m\alpha = \frac{q_m}{3^m}$.

Provemos por indução:

Para $m=1$ segue da hipótese.

Supondo válida para todo $m \leq k$, vamos mostrar que vale para $k+1$.

Somando

$$\cos(k+1)\alpha = \cos k\alpha \cdot \cos \alpha - \sin k\alpha \cdot \sin \alpha$$

e

$$\cos(k-1)\alpha = \cos k\alpha \cdot \cos \alpha + \sin k\alpha \cdot \sin \alpha$$

e, utilizando a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} \cos(k+1)\alpha &= 2 \cos k\alpha \cos \alpha - \cos(k-1)\alpha = \\ &= \frac{2q_k}{3^{k+1}} - \frac{q_{k-1}}{3^{k-1}} = \frac{2q_k - 3^2 q_{k-1}}{3^{k+1}} = \frac{q_{k+1}}{3^{k+1}} \end{aligned}$$

em que $q_{k+1} = 2q_k - 3^2 q_{k-1}$ não é divisível por 3.

3) α e π são incomensuráveis pois se α e π fossem comensuráveis existiriam inteiros m e n não nulos tais que $m\alpha = n\pi$ e $\cos(m\alpha) = \pm 1$. Contradição com 2).

4) $D(\text{cubo}) = (12l) \otimes \frac{\pi}{2} = l \otimes \pi + \dots + l \otimes \pi = (6l) \otimes \pi = 0$, l a aresta do cubo.

5) $D(\text{tetraedro regular}) = l \otimes \alpha + \dots + l \otimes \alpha = l \otimes (6\alpha) \neq 0$, l a aresta do tetraedro. Por quê?

6) $D(S)$ não muda após um número finito de cortes planares e justaposições das peças.

Agradecimentos ao Professor Dr. E. Colli, da Matemateca do IME-USP, com quem tomei conhecimento do assunto e da bibliografia. (<http://matemateca.ime.usp.br/>)

Referências Bibliográficas

1. CROMWELL, P.R. *Polyhedra*, Cambridge: University Press, 1964
2. FREDERICKON, G.N. *Hinged Dissections: Swinging & Twisting*, Cambridge: University Press, 2002
3. RPM, nº 57, *Seção de problemas*, 2005.
4. RPM nº 72, *Quebra-cabeça quadrado*, 2010
4. STILLWELL, J. *Numbers and Geometry*, Springer, 1997
5. <http://home.btconnect.com/GavinTheobald/HTML/Index.html>

