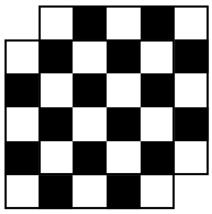
Prof. Bruno Holanda - **Encontro RPM 2011**

Isto é um Absurdo!

1.1 Introdução

Quem nunca brincou de quebra-cabeça? Temos várias "pecinhas" e temos que encontrar uma maneira de unir todas elas para formar uma figura maior. O que costumava ser apenas um passa-tempo, ganhou uma irmã que estudada por muitos matemáticos sérios pelo mundo a *"Tiling Theory"* (traduzindo: Teoria da Cobertura). E por se tratar de um tema muito atrativo, logo ganhou força nas principais competições de matemática.

Problema 1. Determine se é possível cobrir ou não o tabuleiro abaixo (sem sobreposições) usando apenas dominós?



Solução. Pinte as casas do tabuleiro acima alternadamente de branco e preto (como no tabuleiro de xadrez). Note que, não importa como colocamos o dominó no tabuleiro, ele sempre cobre uma casa branca e ou outra preta. Desse modo se fosse possível cobrir o tabuleiro usando apenas dominós, deveríamos ter o tabuleiro com a quantidade de casas pretas igual a quantidade de casas brancas. Mas no tabuleiro "quebrado" existem 18 casas brancas e 16 pretas. Logo, não é possível fazer tal cobertura. $\square$

Se duas cores ajudam muita gente, quatro cores ajudam muito mais! É isso mesmo! Não vá pensando que é só pintar o tabuleiro de preto e branco que você vai resolver todos os problemas de tabuleiro do mundo! O próximo exemplo mostra que às vezes apenas duas cores não bastam.

Problema 2. É possível que um cavalo do xadrez passe por todas as casas de um tabuleiro 4×10 exatamente uma vez e, em seguida retorne para o quadrado original?

	1	2	1	2	1	2	
	3	4	3	4	3	4	
	4	3	4	3	4	3	
	2	1	2	1	2	1	

Solução. Pinte o tabuleiro $4 \times n$ como mostra a figura acima. Assuma que seja possível fazer que o cavalo passe por todas as casas. Note que, se o cavalo está na casa 1 só poderá ir para casa 3 desse modo para o cavalo ir para uma casa de cor 1 ele passa por duas casas de cor 3, e como cada cor possui o mesmo número de casas, fica impossível o cavalo fazer o passeio. $\square$

Problema 3. Em cada um dos dez degraus de uma escada existe uma rã. Cada rã pode, dando um pulo, ir para outro degrau. Porém, quando uma rã faz isso, ao mesmo tempo, uma outra rã deve pular a mesma quantidade de degraus em sentido contrário: uma sobe e outra desce. Conseguirão as rãs colocar-se todas juntas no mesmo degrau? Justifique.

Solução. Vamos dizer que uma rã tem energia i se ela estiver no *i-ésimo* degrau. Por exemplo, uma rã que está no terceiro degrau tem energia 3, se ela pular para o sétimo degrau passará a ter energia 7. Note que a soma das energias de todas as rãs é invariante, i.e, é sempre $1 + 2 + \cdots 10 = 55$. Desse modo se em algum momento todas estiverem no mesmo degrau x, todas também terão energia x, ou seja $10x = 55$. E como $x \in \mathbb{N}$, concluímos que é impossível todas ficarem no mesmo degrau. $\square$

Problema 4. Dado um polinômio quadrático $ax^2 + bx + c$ pode mos fazer as seguintes operações:
i. Trocar a com c.
ii. Tocar x por $x + t$ onde t é um real.
Usando essas operações é possível transformar $x^2 - x - 2$ em $x^2 - x - 1$?

Solução. Aplicando a segunda transformação no polinômio $ax^2 + bx + c$, temos

$$a(x+t)^2 + b(x+t) + c = ax^2 + (2at+b)x + (at^2 + bt + c)$$

cujo discriminante é dado por:

$$\Delta = (2at+b)^2 - 4a(at^2 + bt + c) = b^2 - 4ac.$$

Assim, o Δ é invariante pela segunda transformação. Também não é difícil ver que o mesmo ocorre para a primeira transformação. $\square$

1.2 Problemas de Teoria dos Números

Para começar veremos a prova de um fato fundamental em Teoria dos Números.

Teorema. Existem infinitos números primos.

Prova. Suponha que exista uma quantidade finita de números primos. Sejam $p_1, p_2, ..., p_k$ todos esses números primos. Considere agora o número $P = p_1p_2...p_k+1$. Este número é relativamente primo com todos os primos $p_i's$, logo não pode ser escrito como produto dos mesmo. Isso é uma contradição ao teorema fundamental da aritmética. Assim, a seqüência dos números primos deve ser infinita. □

Problema 5. (Leningrado 1990) Existe algum número de seis dígitos divisível por 11 cujos dígitos sejam 1, 2, 3, 4, 5, 6 em alguma ordem e sem repetições?

Solução. Suponha que $\overline{abcdef}$ seja um número satisfazendo às condições do problema. Usando o critério de divisibilidade por 11, temos que $(b+d+f)-(a+c+e)$ deve ser um múltiplo de 11. Como a soma máxima e mínima de três elementos do conjunto $\{1,2,3,4,5,6\}$ é $6+5+4=15$ e $1+2+3=6$, respectivamente, temos $|(b+d+f)-(a+c+e)| \leq 16-6=10$. Logo, $(b+d+f)-(a+c+e)=0$. Por outro lado, a soma $a+b+c+d+e+f=21$. Logo, é impossível que $b+d+f=a+c+e$. Concluindo que não há números com tais propriedades. □

Problema 6. Mostre que $\sqrt{2}$ não é racional.

Problema 7. Existe algum quadrado perfeito cuja a soma dos dígitos seja 2004?

1.3 Bibliografia

(1) **Bruno Holanda, Carlos Augusto, Samuel Barbosa, Yuri Lima**; *Treinamento Cone Sul 2007*

(2) **Bruno Holanda, Cícero Magalhães, Samuel Barbosa, Yuri Lima**; *Treinamento Cone Sul vol. 2*

(3) **Artur Engel**; *Problem-Solving Strategies*