VERIFICANDO A IRRACIONALIDADE DE ALGUNS NÚMEROS

VITOR EMANUEL GULISZ

Um problema interessante é descobrir se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}$ é racional ou irracional.

Esse é o problema número 360 de [1], e lá a solução apresentada é feita supondo que o número é racional para chegar em uma contradição e, assim, concluir que esse número é irracional. Neste texto, vamos ver um outro argumento muito mais fácil para resolver o problema e também vamos mostrar como podemos usar esse argumento para verificar a irracionalidade de outros números semelhantes.

Primeiro, vamos lembrar a seguinte propriedade:

Um número real é racional se, e somente se, possui representação decimal finita ou infinita periódica.

Veja que aqui estamos nos referindo à representação de números na base 10, mas será que a propriedade acima é válida apenas para a base 10? Será que a base 10 é tão especial assim? A resposta é não. Embora não seja muito conhecida e nem muito divulgada em livros de modo geral, essa propriedade vale para qualquer base. O raciocínio para verificar isso é completamente análogo ao que é feito para a base 10. Portanto, enunciamos a propriedade acima de modo mais geral:

Seja $b > 1$ um número inteiro. Um número real é racional se, e somente se, possui representação finita ou infinita periódica na base b.