seção

Projeto Klein de Matemática em Língua Portuguesa

O Projeto Klein é uma iniciativa internacional, promovida pelo ICMI, que é o órgão da União Matemática Internacional que se dedica às questões ligadas ao ensino da Matemática. No Brasil, o Projeto é coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, em parceria com a Sociedade Brasileira de Educação Matemática, a Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional e a Sociedade Brasileira de História da Matemática.

O objetivo do projeto, inspirado nas ideias do grande matemático Felix Klein, é proporcionar um estímulo aos professores de Matemática, para fazer conexões entre o conteúdo que ensinam e o desenvolvimento da pesquisa em Matemática ao longo do último século e, desse modo, enriquecer suas aulas.

Para atingir esse objetivo, vários matemáticos prepararam textos voltados para o professor de Matemática ressaltando tais conexões. Neste e nos próximos números da RPM, publicaremos um artigo selecionado entre aqueles produzidos por matemáticos brasileiros e portugueses para o Projeto. Embora na maior parte dos casos o conteúdo dos artigos não seja diretamente aplicável à sala de aula do ensino básico, os editores da RPM acreditam que os leitores da RPM deveriam conhecer essa iniciativa e que a leitura dos artigos pode contribuir para a cultura matemática dos professores e para sua atuação profissional. Todos os artigos do Projeto Klein podem ser encontrados no *site* do projeto em

http://klein.sbm.org.br/.

Somas que dão muito errado

Carlos Tomei – PUC-Rio

Vamos denotar por $r = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \cong -0{,}6180$ a razão da progressão geométrica $1,\ r,\ r^2,\ r^3,\ \ldots$

Nossa intenção é mostrar um perigo frequente quando fazemos contas aproximadas. Para começar, observe estes dois fatos muito simples sobre a progressão:

1. O termo geral, r^n, vai a zero quando n fica muito grande, pois $|r| < 1$.

2. Para $n = 2, 3, \ldots,$ temos $r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$. De fato, essa igualdade é equivalente (dividindo por r^{n-2}) a $r^2 = r + 1$, e isso é fácil de verificar:

$$r^2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+5-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 = r + 1.$$

Assim, para calcular potências de r, basta somar as duas potências anteriores,

$$r^2 = r^1 + r^0; \quad r^3 = r^2 + r^1; \quad r^4 = r^3 + r^2; \ldots$$

Para aproximar r^{50}, arredondando com quatro algarismos significativos, obtemos, a partir de 1 e de $-0{,}6180$:

$r^2 = 0{,}3820;\ r^3 = -0{,}2360;\ r^4 = 0{,}1460;$

$r^5 = -0{,}0900;\ r^6 = 0{,}0560;\ r^7 = -0{,}0340;$

$r^8 = 0{,}0220;\ r^9 = 0{,}0120;\ r^{10} = 0{,}0100;$

$0{,}0020;\ 0{,}0080;\ 0{,}0060;\ 0{,}0140;\ 0{,}0200;$

$0{,}0340;\ 0{,}0540;\ 0{,}0880;\ 0{,}1420;\ r^{20} = 0{,}2300;$

$0{,}3720;\ 0{,}6020;\ 0{,}9740;\ 1{,}576;\ 2{,}550;$

$4{,}126;\ 6{,}676;\ 10{,}80;\ 17{,}48;\ r^{30} = 28{,}28;$

$45{,}76;\ 74{,}04;\ 119{,}8;\ 193{,}8;\ 313{,}6;$

$507{,}4;\ 821{,}0;\ 1328;\ 2\,149;\ r^{40} = 3477;$

$5\,626;\ 9103;\ 14\,730;\ 23\,830;\ 38\,560;$

$62\,390;\ 101\,000;\ 163\,400;\ 264\,400;$

$r^{50} = 427\,800.$

Algo horrível aconteceu: o termo geral da sequência, em vez de ir para zero, está crescendo! As aproximações obtidas para r^n são péssimas e estão piorando. O que pode ter dado errado numa simples soma?!

A resposta é sutil: para explicar a dificuldade, vamos usar um pouco mais de notação. Vamos pensar a progressão geométrica como sendo uma sequência a_n:

$$a_0 = r^0;\ a_1 = r^1;\ a_2 = r^2;\ \ldots;\ a_n = r^n;\ \ldots$$

Agora, note que existe uma outra progressão geométrica,

$$b_0 = s^0;\ b_1 = s^1;\ b_2 = s^2;\ \ldots;\ b_n = s^n;\ \ldots$$

com a mesma propriedade: seus termos são obtidos somando os dois termos anteriores. Afinal, a equação que r tinha que satisfazer para que essa propriedade valesse, $r^2 = r + 1$, também tem a raiz s,

$$s = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618.$$

Entretanto, essa sequência gêmea escondida é muito diferente: o termo geral s^n vai a infinito! Aliás, até sabemos com que velocidade seus termos crescem: ao passar de um elemento b_n da sequência para o seguinte, b_{n+1}, temos: