O TEOREMA DOS CARPETES

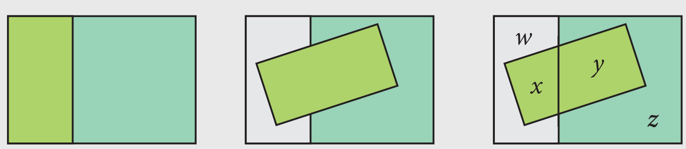
ANA LÚCIA TEIXEIRA NUNES
Colégio Nossa Sra. das Graças e Miguel de Cervantes – São Paulo

INTRODUÇÃO

Um resultado interessante sobre áreas, e que pode ser útil em problemas mais difíceis sobre o assunto, é conhecido com o nome informal de “teorema dos carpetes”. Em 2014, entrei em contato com esse resultado por meio de um dos problemas da 17ª Olimpíada Paulista de Matemática (prova da 1ª fase) que me foi apresentado por Pedro Pomela, aluno do 8º ano da Escola Nossa Sra. das Graças. O problema da Olimpíada tratou do assunto da seguinte forma:

PROBLEMA 2 · nível β (8º e 9º anos do ensino fundamental)

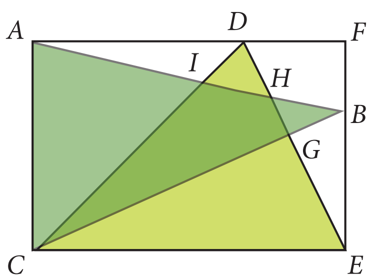
Um fato relativamente simples sobre áreas e que muitas vezes ajuda a resolver problemas complexos é o teorema dos Carpetes:



Colocamos dois carpetes em um dormitório. Se a soma das áreas dos carpetes é igual à área do dormitório, então a área da intersecção dos carpetes é igual à área da região não coberta por carpetes.

(a) Utilizando a notação dada pela figura, isto é, w é a região branca, z é a região verde-escuro, e a região verde claro é composta pelas regiões x e y, sendo que a região y é a intersecção dos carpetes, prove o teorema dos carpetes, ou seja, prove que $y = w$.

(b) Na figura a seguir, *ACEF* é um retângulo. Prove que a área mais escura (quadrilátero *CGHI*) é igual à soma das três áreas brancas.

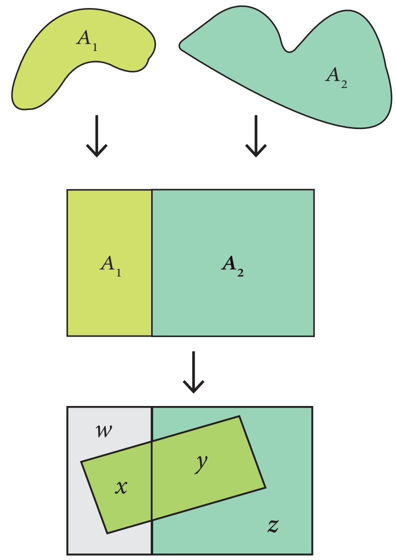


SOLUÇÃO

O item (a) tem resolução imediata observando que $x + w = x + y$, o que implica $y = w$ (propriedade cancelativa da adição). Para o item (b), note que a soma das áreas dos triângulos *ABC* e *CDE* é igual à área do retângulo *ACEF* e, pelo teorema dos carpetes, a área da intersecção entre esses dois triângulos será igual à área da região do retângulo que não foi ocupada por eles, que é a soma das áreas dos triângulos *ADI*, *BEG* e do quadrilátero *DFBH*. Simples e elegante, não é?

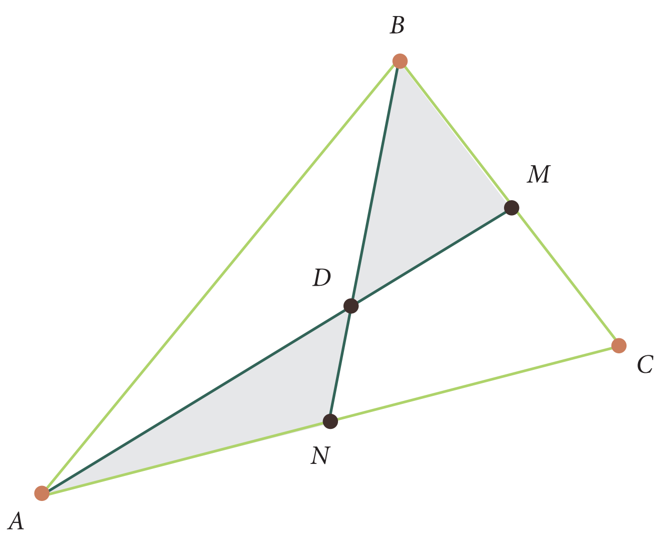
Vale observar que as formas das figuras em questão não interferem na validade do teorema dos carpetes. Isso fica fácil de perceber observando ser sempre possível "trocar" uma figura por um retângulo de mesma área, o que reduz a situação àquela demonstrada no item (a) do problema da Olimpíada, como mostra a figura na coluna ao lado.

Neste artigo pretendo apresentar quatro outros problemas que também podem ser resolvidos de forma elegante por meio do teorema dos carpetes. Os problemas estão dispostos em ordem crescente de dificuldade. Aos leitores que particularmente se interessarem pelo assunto deste artigo, recomendo uma visita ao *link* indicado na bibliografia onde o teorema dos carpetes pode ser visualizado dinamicamente em diversas outras situações de figuras.



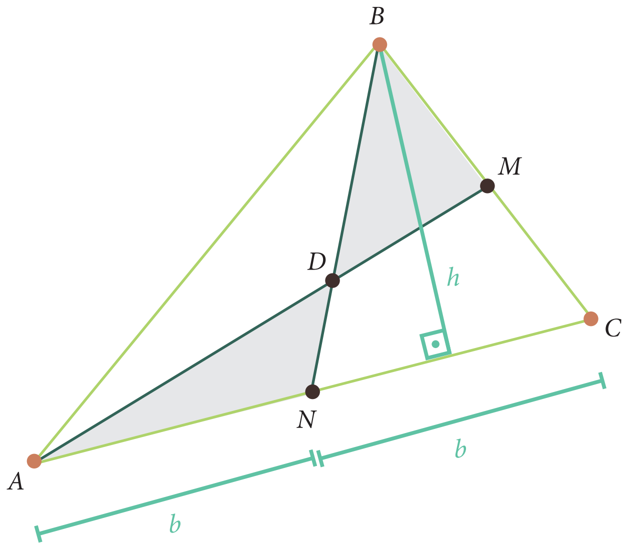
PROBLEMA 1

Sejam *AM* e *BN* medianas do triângulo *ABC* e *D* o seu baricentro. Prove que a área do triângulo *ABD* é igual à área do quadrilátero *CMDN*.



RESOLUÇÃO

Uma propriedade conhecida da mediana é a de que ela divide o triângulo em dois outros de mesma área, como se vê a seguir para a mediana *BN*:

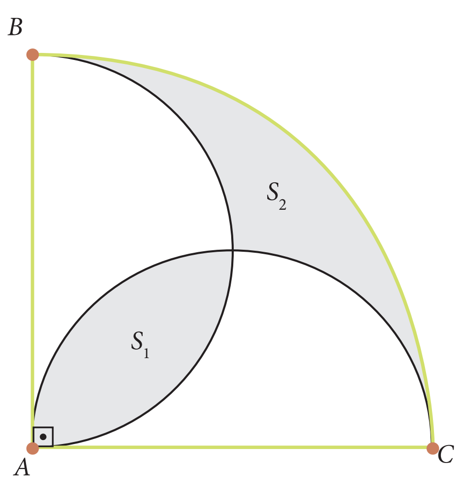


$$A_{\triangle ABC} = \frac{2 \cdot b \cdot h}{2} = b \cdot h \quad \text{e} \quad A_{\triangle ABN} = A_{\triangle CBN} = \frac{b \cdot h}{2}.$$

Observando o mesmo resultado para a mediana AM, podemos concluir que os triângulos ABN e ABM têm mesma área. Agora, pelo teorema dos carpetes, segue diretamente que a área do triângulo ABD, que fica na intersecção dos triângulos ABN e ABM, é igual à área do quadrilátero $CMDN$.

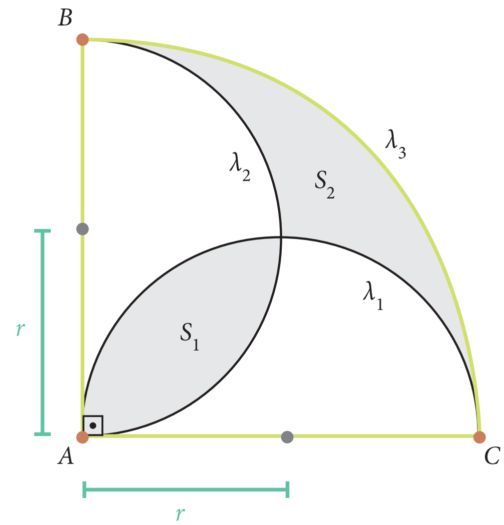
PROBLEMA 2

Sabendo que os arcos da figura são arcos de circunferências, prove que as áreas S_1 e S_2, indicadas na figura, são iguais.



RESOLUÇÃO

Juntas, as áreas dos semicírculos indicados por λ_1 e λ_2 equivalem à área do setor circular indicado por λ_3, como se vê a seguir:



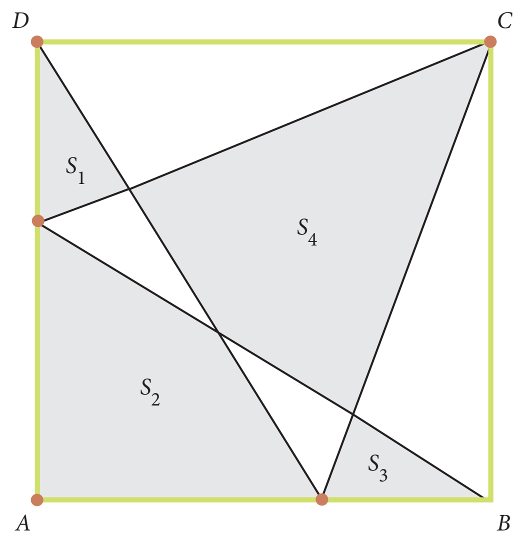
$$S_{\lambda_3} = \frac{1}{4}\pi(2r)^2 = \pi r^2 \quad \text{e} \quad S_{\lambda_1} = S_{\lambda_2} = \frac{1}{2}\pi \cdot r^2 = \frac{\pi r^2}{2}.$$

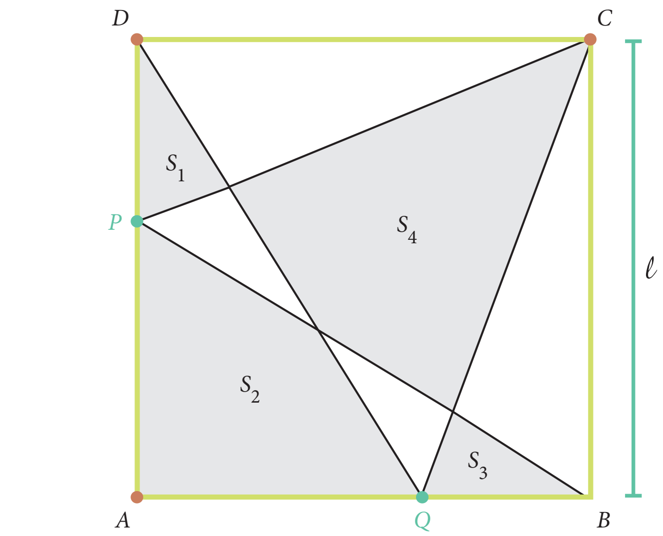
Então, pelo teorema dos carpetes, $S_1 = S_2$.

PROBLEMA 3

Na figura, $ABCD$ é um quadrado. Prove que

$$S_1 + S_2 + S_3 = S_4.$$

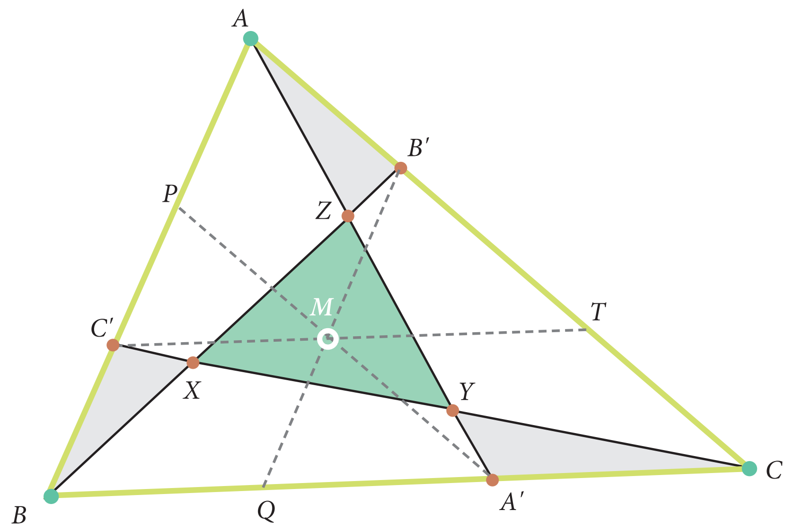




RESOLUÇÃO

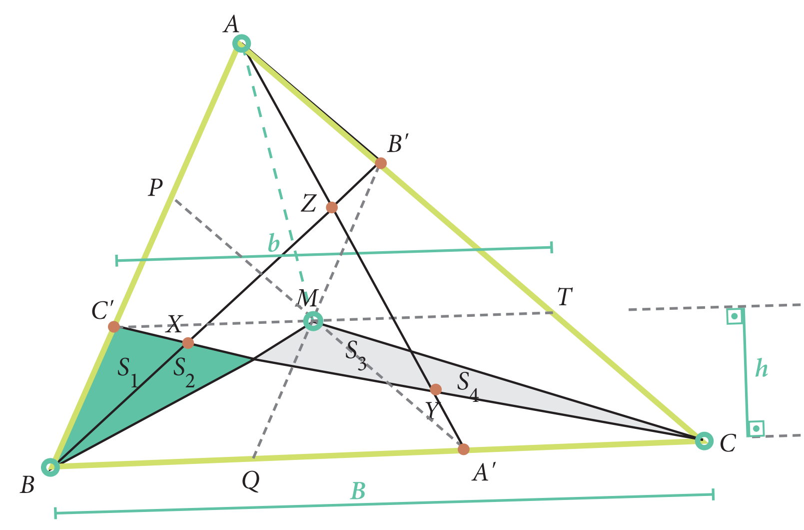
Sendo $ABCD$ um quadrado de lado ℓ, os triângulos PBC e QCD têm mesma área igual a $\ell^2/2$, cada uma equivalente à metade da área do quadrado $ABCD$. Pelo teorema dos carpetes, segue diretamente que

$S_1 + S_2 + S_3 = S_4$.



PROBLEMA 4

No triângulo ABC da figura, PA', QB' e TC' se intersectam em M, e são segmentos paralelos aos lados do triângulo. AA', BB' e CC' são diagonais dos trapézios $ACA'P$, $ABQB'$ e $BCTC'$, e se intersectam (duas a duas) em X, Y e Z. Sendo M um ponto no interior do triângulo ABC, prove que a área do triângulo XYZ é igual à soma das áreas dos triângulos $AB'Z$, $BC'X$ e $CA'Y$.



RESOLUÇÃO

Na figura ao lado, note, por meio do trapézio $BCTC'$, que a soma das áreas dos triângulos BMC e $CC'T$ é igual à área do trapézio $BC'TC$.

$$S_{BC'TC} = \frac{(B+b)\cdot h}{2} \quad \text{e}$$

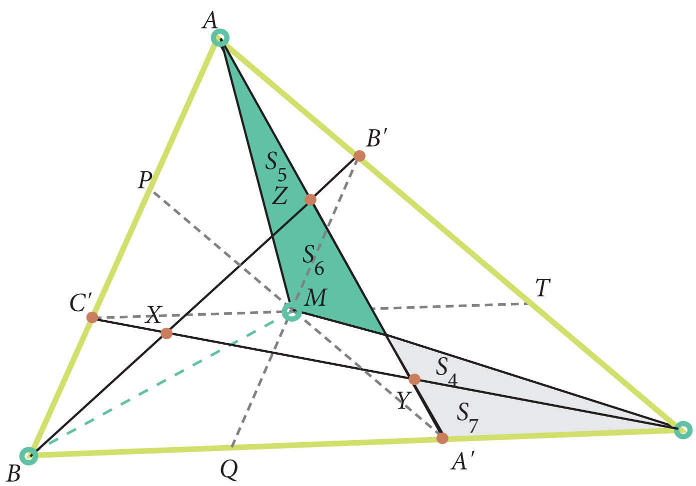
$$S_{\triangle BMC} + S_{\triangle CC'T} = \frac{B\cdot h}{2} + \frac{b\cdot h}{2} = \frac{(B+b)\cdot h}{2}.$$

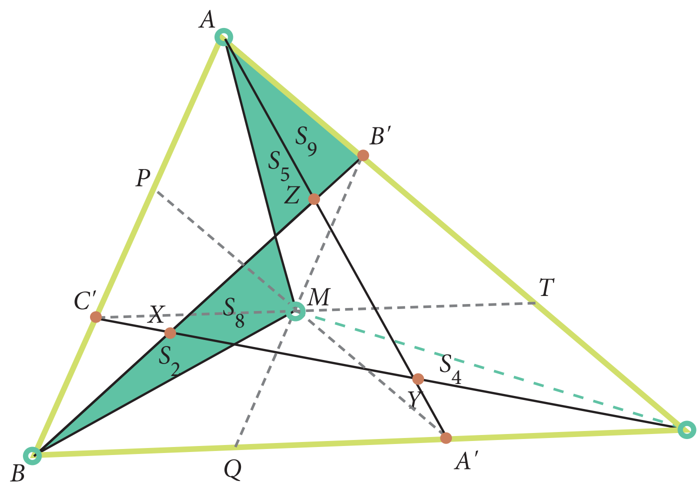
Pelo teorema dos carpetes, segue

$S_1 + S_2 = S_3 + S_4$.

Raciocínio análogo com os trapézios $ACA'P$ e $ABQB'$ (ver figuras a seguir) permite concluir que

$$S_5 + S_6 = S_4 + S_7 \quad \text{e} \quad S_5 + S_9 = S_2 + S_8.$$



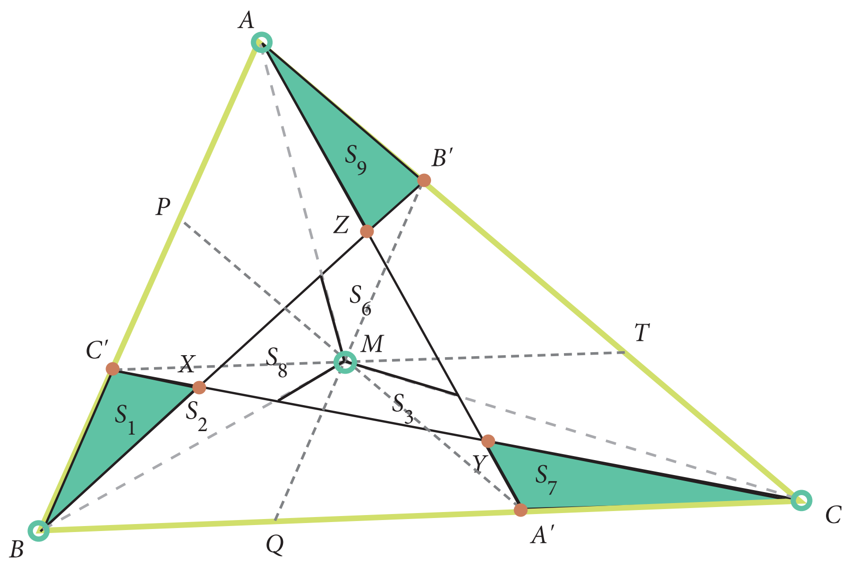


Escrevendo:

$$S_1 + S_2 = S_3 + S_4 \quad (1)$$
$$S_5 + S_6 = S_4 + S_7 \quad (2)$$
$$S_5 + S_9 = S_2 + S_8 \quad (3)$$

e fazendo (1) – (2) + (3), vem $S_1 + S_9 + S_7 = S_3 + S_8 + S_6$.

Na figura abaixo, observe que o resultado que acabamos de obter conclui a demonstração do problema.



BIBLIOGRAFIA

[1] ANDREESCU, T., ENESCU, B. *Mathematical Olympiad Treasures*. Boston: Birkhäuser, 2004.

Link sugerido: http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/CarpetsInSquare.shtml (consultado em 19/07/2014).