ARTEFATOS

INSTRUMENTOS ARTICULADOS QUE DESENHAM CÔNICAS

LÚCIA RESENDE PEREIRA
VALDIR BONFIM
UFU/UBERLÂNDIA - MG

Nos séculos XV e XVI, a presença de sistemas articulados na Geometria intensificou-se e, com o passar dos anos, surgiu uma diversidade de mecanismos capazes de traçar as mais sofisticadas curvas.

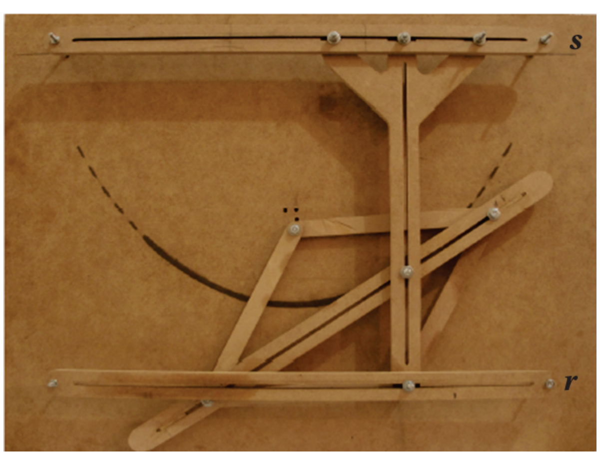
Alguns instrumentos podem ser confeccionados pelos alunos em sala de aula, com a ajuda do professor, o que representa uma alternativa de aprendizagem significativa devido à possibilidade de visualização do traçado da curva, feito de forma dinâmica. Acreditamos que tais construções, utilizando-se madeira, parafusos e lápis, podem ser feitas numa aula de laboratório de uma escola, como uma atividade para acompanhar o estudo das cônicas na Geometria ou Geometria Analítica do ensino médio.

Neste artigo, apresentaremos alguns aparatos que desenham seções cônicas. A justificativa de concepção e funcionamento de cada um deles será baseada na caracterização *geométrica ou analítica* das cônicas.

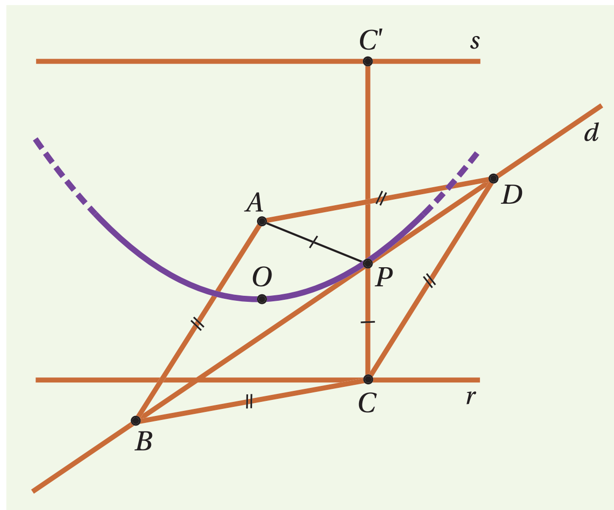
PARABOLÓGRAFO: INSTRUMENTO ARTICULADO PARA TRAÇAR PARÁBOLAS

Na foto e na figura a seguir, as retas r e s são paralelas. Os pontos C e C' deslizam sobre r e s, respectivamente, de forma que o segmento CC' seja sempre perpendicular a essas paralelas. O quadrilátero $ABCD$ é um losango articulado com $AB = BC = CD = DA$. O vértice A do losango é fixo. O vértice C, oposto ao vértice A, desliza sobre r. Os outros dois vértices, B e D, determinam a reta d, que intersecta o segmento CC' no ponto P.

À medida que C desliza sobre r, o ponto P descreve uma parábola com foco A e diretriz r. Conforme você verá a seguir, tal instrumento foi apropriadamente construído de tal forma que, ao se deslocar o mecanismo sobre uma reta (diretriz), o ponto P (em que se acopla o lápis) percorre um "caminho" que é uma parábola.



Para justificar esse processo, observe que os triângulos PAB e PCB são congruentes pelo caso de congruência LAL, já que os ângulos $A\hat{B}P$ e $C\hat{B}P$ são iguais. A congruência implica $PA = PC$. Assim, o ponto P é equidistante de um ponto fixo (A) e de uma reta fixa (r), ou seja, seu lugar geométrico é a parábola de foco A e diretriz r.



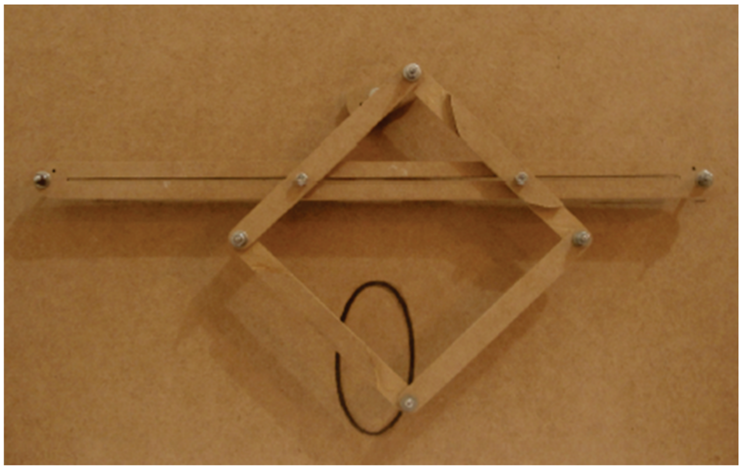
ELIPSÓGRAFO: INSTRUMENTO ARTICULADO PARA TRAÇAR ELIPSES

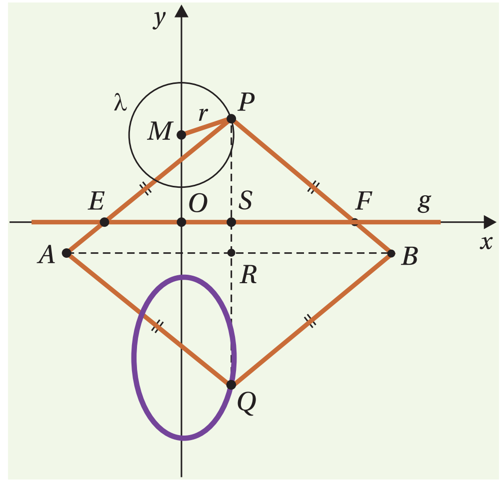
Na foto e no desenho a seguir, $PAQB$ é um losango articulado de lado l. O vértice P do losango é vinculado a um ponto fixo M, o qual é o centro de uma circunferência λ de raio $PM = r$, representada, na foto, pela "tramelinha". Os pontos E e F, fixados nos lados do losango PA e PB, respectivamente, são escolhidos a uma mesma distância do ponto P e podem deslizar sobre o trilho horizontal que aparece na foto e que, na figura, é a reta g.

Vamos mostrar que, quando P percorre a circunferência λ, os pontos E e F movem-se forçados a deslizar sobre o trilho g, o vértice Q do losango (onde se acopla o lápis) descreve uma elipse, que possui um semieixo igual ao raio da circunferência λ e o outro semieixo com comprimento dependendo da escolha dos pontos E e F.

Para justificar que a curva desenhada é uma elipse, vamos usar coordenadas.

Sejam $PA = PB = QB = QA = l$ e $PE = PF = d$.





Adotamos um referencial cartesiano com o eixo X sobre a reta g e o eixo Y perpendicular à reta g, passando pelo ponto M. Nesse sistema de coordenadas, sejam $P = (a, b)$ e $Q = (x, y)$.

Traçamos os segmentos PQ e AB, que se cortam no ponto R. Indicamos por S o ponto de interseção da reta g com o segmento PQ.

Da semelhança entre os triângulos PSF e PRB, temos:

$$\frac{d}{b} = \frac{PF}{PS} = \frac{PB}{PR} = \frac{l}{PR}, \quad \text{que implica} \quad PR = \frac{lb}{d}.$$

Vamos agora determinar a medida do segmento QS para obter a ordenada do ponto Q:

$$QS = RS + QR = PR - PS + QR = PR - PS + PR =$$

$$2PR - PS = 2(lb/d) - b = (2lb - bd)/d = b(2l - d)/d.$$

Faremos $\dfrac{2l-d}{d} = c$, uma constante que depende das dimensões do instrumento e da posição dos pontos fixos E e F. Assim, $QS = cb$.

Como os pontos P e Q têm mesma abscissa, temos $x = a$. A ordenada, y, de Q no sistema escolhido é $-QS = -cb$.

A distância do ponto $P = (a, b)$ ao ponto $M = (0, h)$, centro da circunferência λ, é r, o seu raio. Portanto, $a^2 + (b - h)^2 = r^2$. Fazendo a substituição

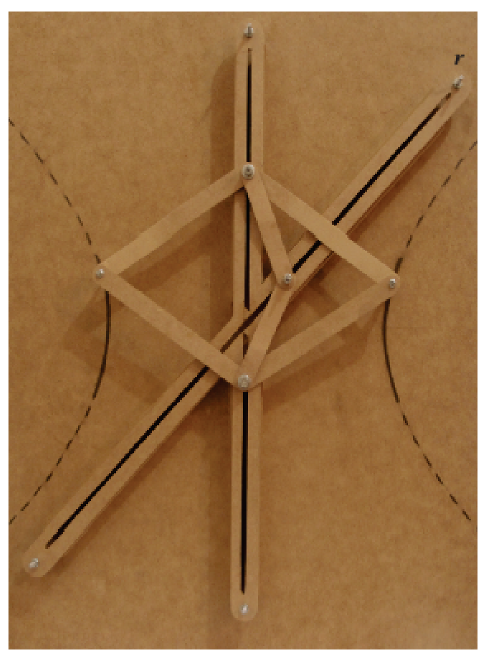
$$a = x \quad \text{e} \quad b = -\frac{y}{c}, \quad \text{obtemos}$$

$$x^2 + \left(-\frac{y}{c} - h\right)^2 = r^2 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{r^2} + \frac{(y + ch)^2}{c^2 r^2} = 1.$$

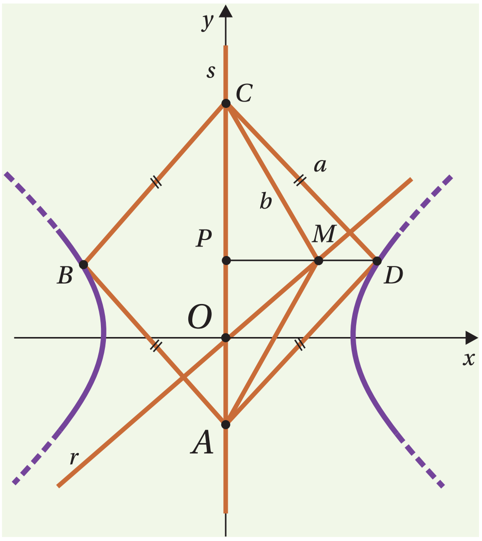
Podemos concluir daí que o ponto Q descreve uma elipse que possui um semieixo igual ao raio da circunferência e outro cujo comprimento depende das medidas do instrumento e da escolha dos pontos E e F.

HIPERBOLÓGRAFO: INSTRUMENTO ARTICULADO PARA TRAÇAR HIPÉRBOLES

Na foto a seguir, $ABCD$ é um losango articulado de lado a com os vértices A e C vinculados a um trilho vertical s.



O ponto M, tal que $CM = AM = b$, sendo $b < a$, pode se movimentar sobre o trilho inclinado r. Vamos mostrar que, quando o ponto M percorre a reta r, os pontos A e C deslizam sobre a reta s e os pontos B e D (acoplados com pontas de lápis) descrevem os dois arcos de uma hipérbole.



Seja O o ponto de interseção das retas r e s.

Fixado um referencial cartesiano com origem O e o eixo Y coincidente com a reta s, sejam $M = (m, n)$ o ponto que percorre a reta r e $D = (x, y)$ o ponto que percorrerá uma parte do ramo direito da hipérbole.

Na figura, $CD = a$, $CM = b$, $PM = m$ e $PD = x$. Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos CPM e CPD, obtemos $CM^2 - PM^2 = CD^2 - PD^2$. Daí, segue que $b^2 - m^2 = a^2 - x^2$, ou seja, $m^2 = x^2 - (a^2 - b^2)$.

Fazendo $a^2 - b^2 = c^2$, ficamos com $m^2 = x^2 - c^2$.

A reta r tem equação da forma $y = kx$ e, como o ponto $M = (m, n)$ pertence a essa reta, temos $n = km$, ou, ainda, $n^2 = k^2m^2$. Como os pontos M e D têm mesma ordenada, faremos as substituições: $m^2 = x^2 - c^2$ e $n = y$.

Ficamos com $y^2 = k^2(x^2 - c^2)$ ou

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{(kc)^2} = 1,$$

que é a equação de uma hipérbole. Observe que, como B é simétrico de D em relação a O, quando D percorre o ramo direito da hipérbole, B percorre o ramo esquerdo. Ainda, uma das assíntotas dessa hipérbole é a reta $y = \frac{kc}{c}x = kx$, que é a reta r.

Acreditamos que a construção dos sistemas articulados engloba a percepção de movimentos, a manipulação e a experimentação, o que desperta o interesse dos alunos e aguça a curiosidade em compreender os conceitos envolvidos na construção, impedindo com isso o caráter superficial na abordagem das cônicas. Fica como sugestão ainda a utilização de *softwares* de geometria dinâmica para reforçar as ideias nos processos de construção, onde, porém, não existem limitações.

Referências bibliográficas

[1] Ávila, G. *A hipérbole e os telescópios*. RPM 34 – SBM, 1997.

[2] Boyer, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher e EdUSP, 1974.

[3] Dante, L. R. *Matemática*. São Paulo: Editora Ática, 2008. Volume único.

[4] Sallum, E. M.; Raphael, D. M.; Garcia, S. R. L. *Aparatos que desenham curvas*. III Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[5] Valladares, R. J. C. *Elipses, sorrisos e sussurros*. RPM 36 – SBM, 1998.

[6] Wagner, E. *Por que as antenas são parabólicas*. RPM 33 – SBM, 1997.