ARTIGO

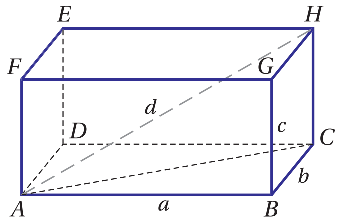
TEOREMA DE PITÁGORAS NO ESPAÇO

José Querginaldo Bezerra
Depto. de Matemática – UFRN

O teorema de Pitágoras é sem dúvida o teorema mais "popular" entre os estudantes do ensino básico. Apesar de existirem mais de 370 demonstrações diferentes (RPM 02), poucos sabem demonstrá-lo, embora muitos saibam seu enunciado. Sua popularidade deve-se a sua vasta utilização em aplicações, não só em Matemática, mas em várias áreas do conhecimento.

Inspirado no cartaz da OBMEP 2012, coloco a seguinte questão: Existe uma extensão natural do teorema de Pitágoras no espaço?

Uma extensão conhecida para uma figura tridimensional é a relação entre as arestas e a diagonal de um paralelepípedo retângulo, como mostra a figura abaixo.



Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos retângulos ABC e ACH, obtemos $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$, ou a soma dos quadrados das arestas que se intersectam em um dos seus vértices é igual ao quadrado da diagonal. Embora esse enunciado seja semelhante ao do teorema de Pitágoras, ele não envolve outros elementos do paralelepípedo, por exemplo, as suas faces.

A intuição sugere que um resultado no espaço, similar ao teorema de Pitágoras, deve envolver um tetraedro com um triedro trirretangular, em analogia ao ângulo reto do triângulo retângulo, como mostra a figura 1.

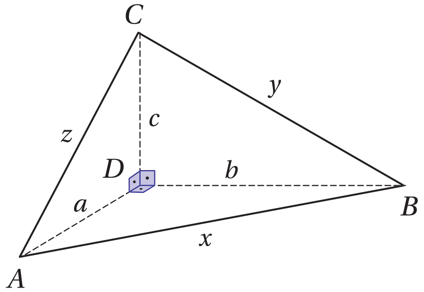


figura 1

A primeira tentativa nos leva a uma relação entre as arestas que compõem o triedro trirretangular e as arestas da face oposta.

De fato, se a, b, c, x, y e z são as medidas dessas arestas, a aplicação do teorema de Pitágoras nas faces que são triângulos retângulos nos conduz o seguinte resultado:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2).$$

O enunciado desse resultado, no entanto, além de não relacionar as faces do tetraedro, assim como no caso do paralelepípedo, não possui a mesma forma do teorema de Pitágoras.

Como segunda tentativa, buscaremos encontrar uma relação envolvendo as áreas das faces do tetraedro. O resultado a seguir é verdadeiro:

Teorema

Num tetraedro com um triedro trirretangular, o quadrado da área da face oposta a esse triedro é igual à soma dos quadrados das áreas das outras faces.

Antes da demonstração, um comentário: O enunciado pode ser considerado uma extensão do teorema de Pitágoras para poliedros. As faces laterais do tetraedro fazem o papel dos catetos do triângulo retângulo e a face oposta ao triedro trirretangular corresponde à hipotenusa do triângulo.

Demonstração do teorema

Sejam $S(ABC)$, $S(ABD)$, $S(ACD)$ e $S(BCD)$ as áreas dos triângulos ABC,

ABD, ACD e BCD, respectivamente.

Como na figura 1, x, y, z, a, b e c são as medidas das arestas AB, BC, AC, AD, BD e CD, respectivamente. Então,

$$S(ABD)=\frac{ab}{2},\ S(BCD)=\frac{bc}{2},\ S(ACD)=\frac{ac}{2},$$

já que os triângulos são retângulos. Pela fórmula de Heron

$S(ABC)=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$, sendo $p=\dfrac{x+y+z}{2}$.

Elevando essas áreas ao quadrado, obtemos:

$$S(ABD)^2=\frac{a^2b^2}{4},\ S(BCD)^2=\frac{b^2c^2}{4},\ S(ACD)^2=\frac{a^2c^2}{4} \quad \text{e}$$

$S(ABC)^2 = p(p-x)(p-y)(p-z)$.

Substituindo o valor de p, ficamos com

$$\begin{aligned} S(ABC)^2 &= \left(\frac{x+y+z}{2}\right)\left(\frac{y+z-x}{2}\right)\left(\frac{x+z-y}{2}\right)\left(\frac{x+y-z}{2}\right)= \\ &=\frac{1}{16}[(x+y+z)(x+y-z)][(y+z-x)(x+z-y)] \\ &=\frac{1}{16}(x^2+2xy+y^2-z^2)(2xy-x^2-y^2+z^2) \\ &=\frac{1}{16}(-x^4+2x^2y^2-y^4+2y^2z^2+2x^2z^2-z^4). \end{aligned}$$

Como $x^2=a^2+b^2$, $y^2=b^2+c^2$ e $z^2=a^2+c^2$, segue que

$S(ABC)^2=\dfrac{1}{16}(4a^2b^2+4a^2c^2+4b^2c^2)$. Ufa! Quantos cálculos!

Logo, $S(ABC)^2=(\dfrac{a^2b^2}{4}+\dfrac{b^2c^2}{4}+\dfrac{a^2c^2}{4})=S(ABD)^2+S(BCD)^2+S(ACD)^2$.

Nota da RPM

No capítulo 4, p. 80, do livro *Temas e problemas elementares*, Coleção do Professor de Matemática (Elon Lages Lima e outros), publicação da SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, está uma demonstração do resultado final deste artigo, sem utilizar a fórmula de Heron. No livro, após a demonstração, há uma nota afirmando que o resultado é mais geral: "se uma figura plana qualquer é projetada em três planos perpendiculares dois a dois, o quadrado da área dessa figura é igual à soma dos quadrados das áreas das três projeções".