SOBRE MÚLTIPLOS "IRADOS"

Compilado por GILBERTO GARBI, a partir de informações fornecidas pelos professores ANTONIO LUIZ PEREIRA, DANIEL V. TAUSK, MANUEL V. P. GARCIA, RENATE WATANABE e SEVERINO TOSCANO MELO, que se divertiram discutindo o problema e suas implicações.

Já na década de 80, vários professores brasileiros conheciam uma curiosa proposição da Aritmética:

Qualquer número natural tem um múltiplo que pode ser escrito utilizando-se apenas os algarismos 0 *e* 1.

A inclusão de uma questão sobre isso na OBMEP/2011 (RPM 77, p. 9) reacendeu o interesse sobre o problema junto a nossos professores e trouxe à tona informações interessantes que a RPM deseja compartilhar com seus leitores.

Em primeiro lugar, vale dizer que a denominação múltiplo "irado", para o *menor* dos múltiplos de um natural qualquer que possam ser escritos empregando-se apenas os algarismos 0 e 1, é criação do Comitê de Provas da OBMEP, valendo-se de um adjetivo usado coloquialmente pelos jovens de hoje, de modo que ninguém irá (ainda) encontrá-la nos livros sobre Teoria dos Números.

A referida proposição pode ser demonstrada de várias maneiras, mas a mais elementar delas parece ser a seguinte: sejam n um inteiro positivo qualquer e

$$1, 11, 111, 1111, \ldots\ldots, 11111\ldots1,$$

a sequência de n naturais cujo último elemento contém n algarismos 1. Dividamos cada um dos elementos por n, obtendo n restos. Se algum desses restos for zero, teremos encontrado um múltiplo de n escrito apenas com o algarismo

1; se nenhum dos restos for zero, então, pelo “princípio das casas de pombos”, pelo menos dois dos restos serão iguais, já que somente $(n - 1)$ restos diferentes podem ser obtidos quando se divide um inteiro qualquer por n. Sejam a e b os dois números da sequência que produziram restos iguais ao serem divididos por n, com $a < b$. Então, a diferença $b - a$ é divisível por n. Mas essa diferença é formada por um conjunto de algarismos iguais a 1, seguido de um conjunto de algarismos iguais a 0, e a proposição está demonstrada.

Provado que todo natural tem pelo menos um múltiplo que pode ser escrito apenas com 0’s e 1’s, fica igualmente demonstrado que todo natural tem seu “irado”, já que sempre um deles será o menor.

O leitor terá observado que em etapa alguma da prova acima foi preciso supor que a base de numeração em que n está grafado é nossa familiar base 10: toda a argumentação continua válida, qualquer que seja a base do sistema de numeração utilizado (o caso da base 2 é trivial já que nela existem só os algarismos 0 e 1).

Embora o processo utilizado para a prova da proposição conduza invariavelmente a um múltiplo grafável apenas com 1’s e 0’s, nem sempre o que se obtém é o “irado”, ou seja, o menor daqueles múltiplos. Por exemplo, para $n = 7$, o processo descrito conduz a 111.111 $(7 \times 11 \times 37 \times 39)$, mas o “irado” de 7 é 1001 $(7 \times 11 \times 13)$. Como fazer, então, para se obter o “irado” de n qualquer?

Para alguns naturais particulares, como 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9, uns poucos raciocínios elementares resolvem a questão. Por exemplo, o “irado” de 3 só pode ser 111 porque, para ser divisível por 3, um número formado por 0’s e 1’s tem que ter no mínimo três 1’s e o menor deles é 111. Raciocínio análogo é usado para provar que o “irado” de 9 é 111.111.111 ou que o de 45 é 1.111.111.110. Em casos menos óbvios, o método de tentativa e erro é enfadonho e nada prático. Mas ele pode ser simplificado, conforme o exemplo a seguir, onde se determina o “irado” de 7 por meio de uma espécie de “Crivo de Eratóstenes de irados”: Os dois primeiros algarismos do “irado” procurado só podem ser 10 ou 11. Como nenhum desses números é múltiplo de 7, os candidatos seguintes são 100, 101, 110 e 111. Novamente, nenhum sendo múltiplo de 7, devemos testar as alternativas 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110 e 1111. Como 1001 é divisível por 7, esse é seu “irado”. O leitor verificará facilmente que 1001 é também o “irado” de 13 e de 77 e que 111 também é o “irado” de 37. Por outro lado, 110 só é “irado” de si mesmo, porque seus outros divisores são 2, 5, 10 e 11, cujos “irados” são 10, 10, 10 e

11. À medida que n cresce, esse algoritmo vai se tornando exponencialmente mais trabalhoso, mas ele funciona com o auxílio de uma calculadora manual para n até algumas poucas dezenas. A partir daí, é recomendável programar um computador para o trabalho. O leitor está convidado a encontrar os "irados" de 19 e 23.

É possível demonstrar que todo número natural, primo com 10, tem, na base 10, pelo menos um múltiplo formado apenas por 1's (do tipo 111...1). Por exemplo, $37 \times 3 = 111$ ou $37 \times 3.003 = 111.111$. A prova pode ser encontrada no artigo *Voltando a falar sobre dízimas*, RPM 10, p. 23. Prova-se, também, que todo primo maior do que 5 tem, na base 10, um múltiplo iniciando e terminando com 1, sendo todos os demais algarismos intermediários iguais a 0 (do tipo 10000...0001). O primo 13 é um exemplo ilustrativo das duas afirmações, pois ele tem os múltiplos 111.111 e 1001 (além de 10101).

Imagine o leitor, agora, que tomemos um natural n qualquer e um bloco de algarismos dentre os existentes em determinada base de numeração. Então, pode-se provar que existe um múltiplo de n formado pela repetição daquele bloco de algarismos, seguida eventualmente de certa quantidade de zeros (inclusive nenhum zero). Por exemplo, imaginemos o bloco 157 de algarismos de uma base qualquer maior do que 7 e o natural 21. Então existe um múltiplo de 21 do tipo 157157157....000 (um deles é 157157157157157157). O leitor provará essa proposição utilizando o mesmo raciocínio empregado no início deste artigo. Certamente foi por esses e outros tipos de diabruras com os números que Gauss costumava dizer que "a Matemática é a rainha das ciências e a Teoria dos Números é a rainha da Matemática"...

Dentro da atual tendência utilitarista do ensino da Matemática no Brasil, alguém poderá perguntar: "E para que servem os múltiplos 'irados'?". À primeira vista, parece pouco provável que os habituais clientes da Matemática – físicos, engenheiros, financistas, estatísticos, etc. – encontrem para eles alguma aplicação prática no contexto em que vivem. Mesmo assim, eles servem para algumas coisas importantes, como treinar o raciocínio lógico-dedutivo dos jovens, fazê-los sentir como acontecem as descobertas matemáticas a partir de perguntas, conjecturas e demonstrações e motivá-los ao estudo e pesquisa, através do prazer que obtêm ao realizar suas próprias inquirições e descobertas. Finalmente, eles servem para mostrar que existe muita beleza, desafio e inteligência fora do restrito território do exclusivamente contextualizável em Matemática.